# Cálculo integral

## Sucesiones y series de funciones

Antonio Rivera Figueroa



# CÁLCULO INTEGRAL. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

**DR. ANTONIO RIVERA FIGUEROA**
INVESTIGADOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
CINVESTAV DEL IPN

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

**Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:**

**correo:**
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

**fax pedidos:**
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

**e-mail:**
info@editorialpatria.com.mx

**home page:**
www.editorialpatria.com.mx

---

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez
Supervisor de preprensa: Gerardo Briones González
Diseño de portada: Juan Bernardo Rosado Solís
Fotografías: © Thinkstockphoto

Revisión técnica:
Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

*Cálculo integral. Sucesiones y series de funciones*

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-900-5



Impreso en México
Printed in México

**Primera edición ebook: 2014**

---

# Dedicatoria

Dedico esta obra a la memoria de mi querida esposa Gloria y de mi entrañable madre Nachita. También va mi dedicatoria a mis hijos Gloria, Karla y Toño.
A mis nietos Robin, Sandy y Toñito, y
con cariño a mi hermana Sara.

# CONTENIDO

# PRÓLOGO

Este texto es el segundo de una obra de dos volúmenes, el primero dedicado al cálculo diferencial y este al cálculo integral. Está dirigido a estudiantes y profesores de cálculo de funciones de una variable real del nivel universitario. Aquí se desarrolla la teoría de la integral de Riemann para funciones continuas o continuas por piezas y también se incluye un amplio capítulo sobre sucesiones y series de funciones, así como un apéndice dedicado a la integral de Riemann para funciones acotadas no necesariamente continuas. Los requisitos para estudiar este libro son un curso universitario de cálculo diferencial y teoría básica sobre sucesiones y series de reales. Por supuesto, se requiere que el curso de cálculo diferencial haya cubierto los teoremas del valor medio (Rolle, Lagrange y Cauchy) así como los desarrollos y polinomios de Taylor. Todos se encuentran en el primero de los volúmenes mencionados.

El primer capítulo de este volumen está dedicado a la definición de la integral de Riemann para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y a la interpretación de la integral de una función como el área de la región bajo la gráfica de la función, cuando esta es no negativa. En este mismo capítulo la definición se extiende a funciones continuas por piezas, que son las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado excepto quizá por un número finito de discontinuidades en donde existen los límites laterales. También se enuncian y demuestran las principales propiedades de la integral, como son, por ejemplo: linealidad, aditividad y monotonía. La teoría de la integral de Riemann para funciones acotadas en general se presenta en un amplio apéndice. La razón de haberlo hecho así es que la teoría de la integral de Riemann para funciones acotadas no necesariamente continuas es un tanto más complicada que la teoría para funciones continuas. La teoría de la integral para funciones continuas o continuas por piezas son de interés para un amplio público, mientras que la teoría para funciones acotadas en general son de interés para quienes están estudiando una carrera de matemáticas.

Pretendemos que este libro sea de utilidad para estudiantes y profesores de las diferentes carreras de ingeniería y ciencias, así que decidimos presentar en el cuerpo principal de la obra la teoría para funciones continuas y desarrollar con todo detalle la teoría para funciones acotadas en un apéndice.

El capítulo 2 está dedicado al teorema fundamental del cálculo para funciones continuas. Para el caso de las funciones acotadas en general, el teorema fundamental se presenta en el apéndice. La diferencia entre ambos casos es de fondo. Para funciones continuas es mucho más simple que para el caso de funciones acotadas no necesariamente continuas. La prueba para funciones continuas es muy simple y es recomendable para quienes se inician en el estudio de los fundamentos del cálculo. Al presentar ambos acercamientos en una misma obra, el lector tendrá la oportunidad de compararlos y apreciar los esfuerzos adicionales que han de hacerse para tratar la integral de funciones acotadas no necesariamente continuas. El desarrollo de la teoría de la integral para funciones acotadas y el teorema fundamental para este caso puede estudiarse después de haber tenido la experiencia con la teoría y el teorema fundamental para funciones continuas.

Históricamente, la teoría de la integral se desarrolló gradualmente, primero para funciones continuas y posteriormente para funciones acotadas sin imponerles la condición de que fuesen continuas. La teoría de la integral para funciones continuas fue establecida por Cauchy durante la segunda y tercera décadas del siglo XIX, posteriormente y hacia la mitad de ese mismo siglo, la teoría de la integral para funciones acotadas fue desarrollada por Riemann. La teoría de Riemann fue motivada por el surgimiento de un concepto más general de función del que disponía Cauchy.

Este concepto más general de función fue dado por Dirichlet en 1837, es el que podemos encontrar hoy en día en casi todo libro de cálculo y es el que concibe a una función como una regla de asignación que asocia a cada elemento de un conjunto llamado el dominio de la función, un único elemento de un segundo conjunto llamado el contradominio.

De la fórmula del teorema fundamental $\frac{a}{b} f(x)dx = F(b)F(a)$, donde $F$ es una primitiva de $f$ en el intervalo $[a, b]$, se desprende la importancia de disponer de métodos que permitan hallar una primitiva de una función dada. Estos son los llamados métodos de integración, de los cuales algunos de los más conocidos se presentan en el capítulo 3. Entre otros métodos, se presenta el denominado método de integración por partes, mismo que no puede faltar en ningún libro de cálculo. Este método se ilustra con una amplia variedad de casos. También se presenta el método de integración de funciones racionales mediante la descomposición en fracciones parciales. Estamos seguros que el lector encontrará detalles acerca de este método que no hallará en otros libros. Otro método de integración es el que se refiere a las integrales de funciones racionales en las funciones seno y coseno. En este caso se hace notar que el conocido cambio de variable $u \tan \frac{x}{2}$ puede fallar en la obtención de primitivas.

El capítulo 4 está dedicado a las aplicaciones del cálculo integral. Existen diversas situaciones en donde se aplica la integral; entre estas destacan el cálculo de áreas de regiones en el plano, que por lo común utilizamos para motivar su definición, aunque también se aplica al obtener volúmenes y áreas de sólidos de revolución, que se generan al rotar una curva alrededor de un eje. Otra de sus aplicaciones es la determinación de longitudes de curvas. Algunas que también son importantes se refieren al cálculo del trabajo realizado por una fuerza y determinación de centroides, tanto de cuerpos sólidos como de regiones en el plano. Un curso de cálculo sin estas aplicaciones estaría incompleto.

El capítulo 5 está dedicado a las sucesiones y series de funciones. Es un amplio capítulo en donde se tratan la convergencia puntual y la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones. Se muestra con diversos ejemplos la diferencia entre ambos conceptos de convergencia poniendo especial énfasis en los resultados relativos a la continuidad, derivabilidad e integrabilidad de los elementos de una sucesión (o términos de una serie) y su límite. También se dedica una sección a las series de potencias y a los desarrollos en series de potencias de funciones importantes del cálculo. Toda la teoría se ilustra con numerosos ejemplos.

Además de mostrar la utilidad práctica que tiene la integral a través de los diversos ejemplos presentados a lo largo del libro y de los desarrollados en el capítulo 4, pretendemos que el libro ayude al estudiante a adquirir una formación sólida en matemáticas que apunte hacia un pensamiento analítico, característico e indispensable para todo científico o ingeniero. Este objetivo en nada se contrapone con el objetivo de que el estudiante adquiera destrezas algorítmicas, por ejemplo en la aplicación de los métodos de integración. También es conveniente que el estudiante se involucre en el uso de las computadoras, a las cuales hemos hecho referencia en diversas ocasiones.

Es una fortuna que vivamos en una época en la que es relativamente fácil disponer de poderosas computadoras personales, principalmente las portátiles. Hay una variedad de programas para computadora capaces de realizar rapidísimos cálculos numéricos, extraordinarios cálculos simbólicos y construir hermosas gráficas. Debido a todas estas cualidades, las computadoras incrementan nuestro potencial de descubrimiento y aprendizaje, además de que nos permiten encontrar respuestas a preguntas que en ocasiones nos planteamos sobre situaciones que, aun con los recursos analíticos de las matemáticas, son difíciles de hallar. El libro ofrece muchas oportunidades para usar esta tecnología electrónica, de hecho la solución de casi cualquier problema de este

libro puede obtenerse con la ayuda de la computadora; sin embargo, la tecnología debe utilizarse como último recurso o para verificar los resultados producidos por nuestros conocimientos y no debe usarse para hallar una “pronta respuesta”, pues siempre será mejor para desarrollar nuestro intelecto anteponer la reflexión a la acción. Muchas veces lo interesante no es hallar la respuesta sino el procedimiento para hallarla.

Antonio Rivera Figueroa

# AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer al Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional por el amplio apoyo que siempre me ha brindado para llevar a cabo mis investigaciones y la escritura de obras como la presente. Los resultados de estas investigaciones han suministrado material que se incluye a lo largo del libro y que espero lo haga más didáctico en el tema de los fundamentos del cálculo. También agradezco a mis alumnos de varias generaciones del curso de cálculo que a lo largo de varios años he ofrecido en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del mismo Instituto. De mis alumnos no solo me han hecho consciente de las dificultades que se presentan en el estudio de los fundamentos del cálculo sino también he aprendido ideas de ellos y me han hecho reconocer que las ideas del profesor no necesariamente son mejores que la de sus discípulos. Gracias a esos jóvenes por sus enseñanzas.

# CAPÍTULO 1

# INTEGRAL



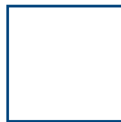
# 1.1 Una reflexión sobre el concepto de área

En este capítulo estudiaremos uno de los conceptos más importantes del cálculo. Así, toca ahora el turno a la integral.

El concepto de integral tiene su génesis en el problema de calcular áreas de regiones; aunque, vale la pena destacar que ese es solo su origen, pues el concepto de integral evolucionó de tal manera que casi desde su invención adquirió identidad propia y se hizo independiente, así que el cálculo de áreas pasó a ser solo una de sus diversas y útiles interpretaciones. De cualquier manera, conviene referirnos al área, en primera instancia, para establecer las primeras ideas sobre el concepto de integral.

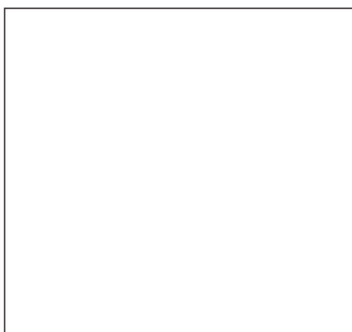
Aprendimos a calcular áreas de regiones simples desde la educación primaria. Ahora lo haremos para regiones más complicadas, así, para tal efecto, es conveniente que reflexionemos sobre las dificultades que entraña el cálculo de áreas de regiones en general.

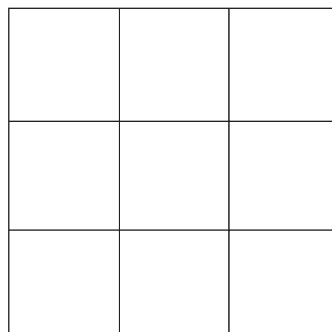
Para medir el área de una región, a la que llamaremos la superficie en el plano, debemos partir de una unidad de área. Así, todas las áreas las referiremos a esta unidad o a fracciones de esta. La unidad de área la elegimos con base en nuestro gusto, necesidades o de manera arbitraria, pero una vez que se ha elegido, queda fija durante todo el proceso o el desarrollo del problema que estamos resolviendo. Elijamos pues, una unidad de área, en este caso será el área de un cuadrado:



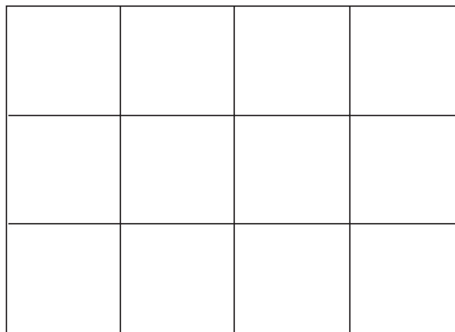
Además de definir la unidad de área, deberemos adoptar una unidad de longitud, lo que nos facilitará el cálculo de áreas con base en las medidas unidimensionales de las regiones. Una unidad de longitud conveniente es el lado del cuadrado adoptado como unidad de área.

Dada una región, medir su área significa determinar cuántas unidades o fracciones de unidad "caben en esta". Las regiones más fáciles de medir son los cuadrados cuyos lados miden un número entero de unidades de longitud.



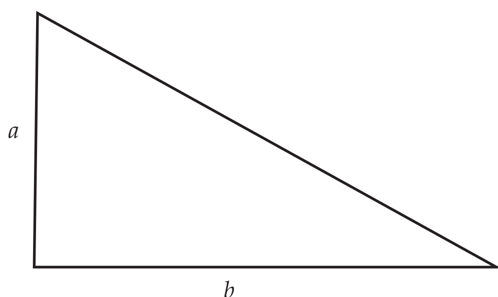


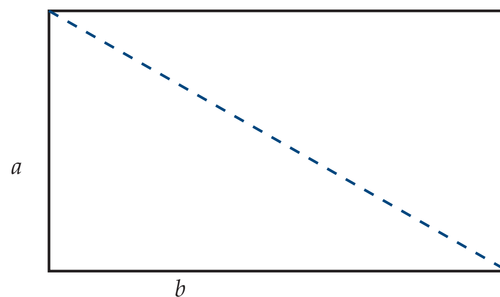
Si el lado de un cuadrado mide $n$ unidades, donde $n$ es un entero, entonces el cuadrado mide $n^2$ unidades de área. Es igual de fácil medir el área de un rectángulo cuyos lados miden, cada uno, un número entero de unidades de longitud. Si los lados de un rectángulo miden respectivamente $m$ y $n$ unidades, entonces su área es igual a $mn$ unidades de área.



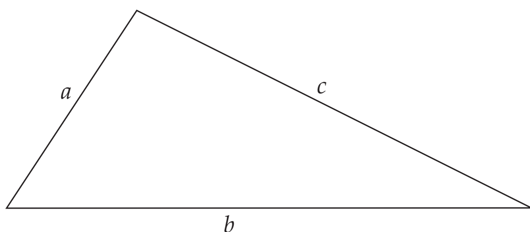
Si las longitudes de los lados del rectángulo no son números enteros sino números reales, supongamos $a$ y $b$, respectivamente, diremos que el área del rectángulo es *por definición* el número real $ab$. Esto incluye, por supuesto, los cuadrados cuyas longitudes de los lados son números reales. A partir de aquí, ya podemos decir que tenemos una primera generalización del concepto de área. Ya no la concebimos como el número de unidades de área "que caben" en el cuadrado o en el rectángulo, sino que simplemente constituye el producto de los números reales correspondientes a las longitudes de los lados.

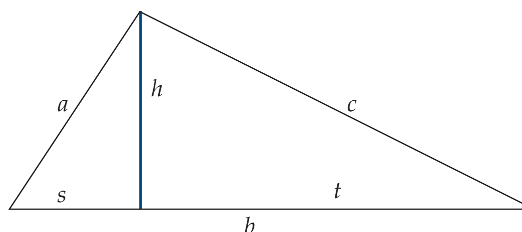
A partir del área de un cuadrado y, en general, de un rectángulo, veamos cómo podemos calcular el área de figuras un poco más complicadas. Por ejemplo, consideremos un triángulo rectángulo. En este caso, completamos el triángulo a un rectángulo




Entonces, el área del triángulo será la mitad del área del rectángulo; de esta forma, el área del triángulo rectángulo es $\frac{1}{2}ab$. Hasta ahora sabemos cómo se calcula el área de cuadrados, rectángulos y triángulos rectángulos. Ahora, consideremos un triángulo arbitrario de lados $a$, $b$ y $c$. La altura respecto de alguna de las bases dividirá al triángulo en dos triángulos rectángulos, como se muestra en las siguientes figuras.



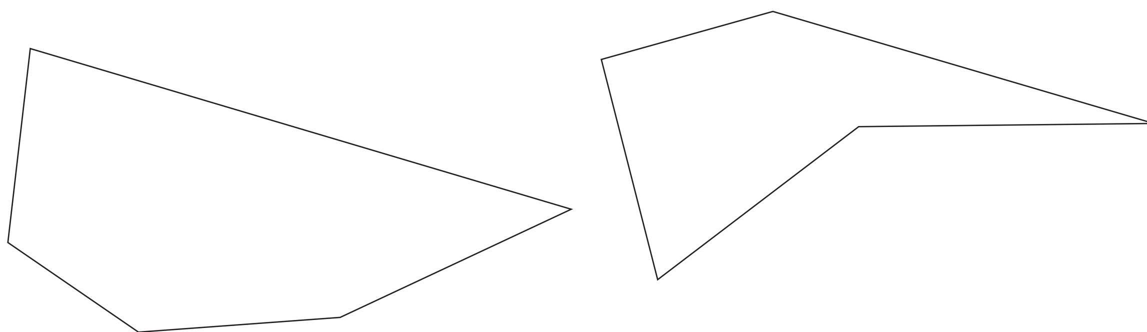




En este caso, los triángulos rectángulos determinados por esta altura, cuya longitud suponemos $h$, tienen áreas $\frac{1}{2}hs$ y $\frac{1}{2}ht$, respectivamente. Entonces, el área del triángulo original será igual a la suma de estas áreas, es decir

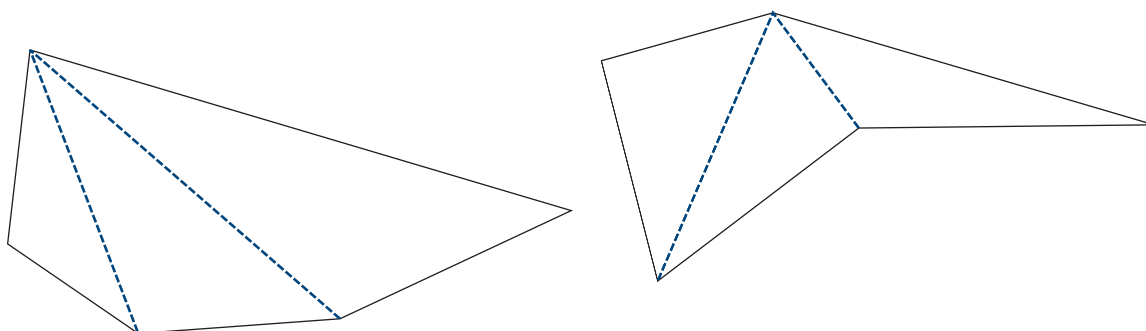
$$\frac{1}{2}hs + \frac{1}{2}ht = \frac{1}{2}h(s + t) = \frac{1}{2}hb.$$

Esta es la fórmula para el área de un triángulo: un medio de la base por la altura. Aunque en realidad, deberíamos decir que el área es igual a un medio de cualquier lado del triángulo por la altura correspondiente. Puede elegirse como base cualquier lado y la altura será la correspondiente a este.

Ahora, consideremos cualquier figura limitada por líneas rectas. Nos referimos a figuras como poligonales o, mejor dicho, regiones limitadas por poligonales. Las siguientes figuras son poligonales:



En este caso, para calcular el área procedemos a dividir la figura en triángulos ajenos, es decir triángulos cuyo único posible traslape son sus lados. El área de la figura poligonal es, entonces, la suma de las áreas de los triángulos que forman la figura:

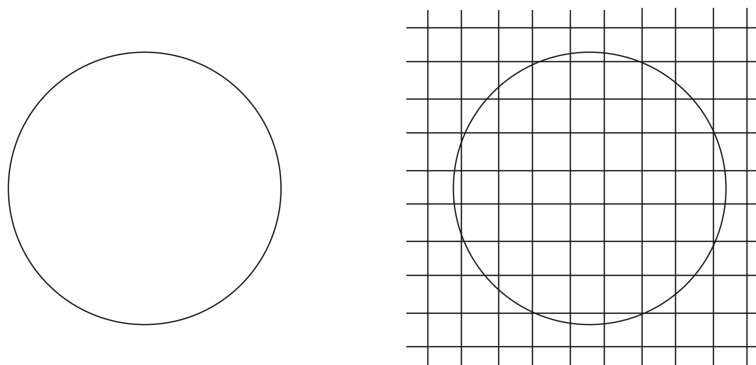


Con este procedimiento podemos obtener todas las fórmulas de las áreas de las figuras poligonales clásicas, como los trapecios y los trapezoides. La idea central de esta técnica para calcular el área de figuras poligonales es la triangulación. Cualquier figura que se pueda triangular es susceptible de calcular su área. Sin embargo, si la figura no puede triangularse, el problema se torna sumamente difícil, este es el caso del círculo.

# 1.2 Área del círculo

Ciertamente, desde nuestro primer acercamiento al estudio de la matemática, aprendimos que el área del círculo de radio $r$ es $\pi r^2$, pero esta fórmula nunca fue deducida. Quizá lo hicimos en nuestros cursos de matemáticas de nivel bachillerato, precisamente en los de cálculo elemental, pero antes de ellos, ya habíamos aceptado la fórmula sin ningún cuestionamiento. Ahora es el momento para que reflexionemos sobre cómo es que se obtiene esta fórmula y para que reconozcamos la dificultad que entraña. El cálculo del área del círculo va más allá de la aritmética, demanda conceptos más elaborados que los expuestos para figuras poligonales; así pues, requiere del concepto de límite. Pero, el cálculo del área del círculo es un problema particular de una problemática general, que precisamente es lo que abordaremos para cierto tipo de regiones especiales del plano.

Una manera práctica de obtener un valor aproximado del área de un círculo es haciendo una cuadrícula, tan fina como deseemos o podamos, sobre el plano donde tengamos dibujado el círculo. Podemos hacer este dibujo en un papel milimétrico y elegir como unidad de área el centímetro cuadrado o el metro cuadrado. Después, debemos calcular el número de cuadrados que están contenidos en el círculo. La suma de las áreas de estos cuadrados es una aproximación del área del círculo en milímetros cuadrados, que después convertimos a la unidad convenida de área. También es una aproximación de esta área, la suma de las áreas de los cuadrados que están contenidos en el círculo más los cuadrados que no están contenidos en el círculo, tienen al menos un punto en común con él (véase figuras).

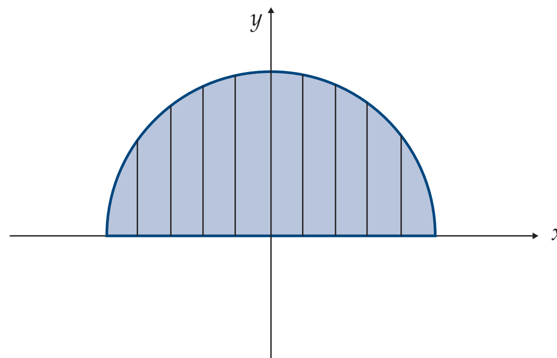


Entre más fina sea la cuadrícula, mejor será la aproximación al área que obtengamos. Si solamente consideramos los cuadrados interiores, la aproximación será un número menor que el área del círculo, en este caso se dice que obtenemos una *aproximación por defecto*. Ahora bien, si consideramos los cuadrados interiores y también los que no están contenidos en el círculo pero lo traslapan, obtendremos una aproximación que será mayor que el área del círculo, en este caso obtenemos una *aproximación por exceso*. Con este procedimiento no podemos aspirar más que a aproximaciones, si bien es cierto que resultan buenas, no serán más que eso: aproximaciones, no el valor exacto. El valor exacto está dado por un límite, uno que existe en teoría para el caso del círculo; aunque es imposible expresarlo numéricamente, como nos gustaría hacerlo, al menos sí lo podemos tener perfectamente definido.

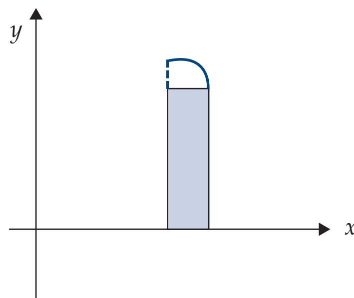
### 1.2.1 Aproximaciones superiores e inferiores

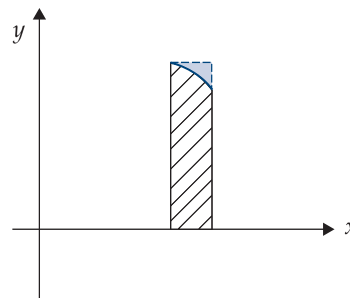
Otra manera de aproximarnos al área del círculo de radio $r$, es considerando un semicírculo de radio $r$, en un sistema de ejes cartesianos, que es la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ .

Dividamos el intervalo $[-r, r]$ sobre el eje de las abscisas en un número de partes iguales, digamos $n$. Esta división determina $n - 1$ puntos en el intervalo $[-r, r]$: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Sobre estos puntos, levantamos líneas verticales hasta el semicírculo, con lo cual dividimos el semicírculo en $n$ franjas verticales.



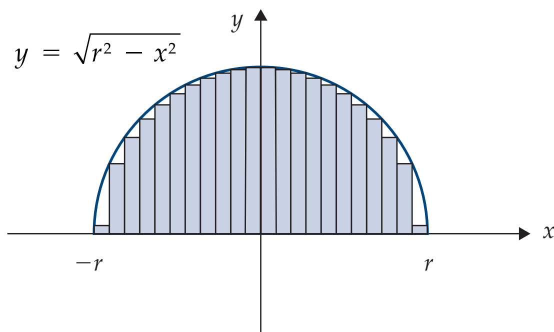

Con excepción de las franjas de los extremos, cada franja está limitada por dos segmentos rectos verticales, por un segmento horizontal como base y, en la parte superior, por un fragmento del semicírculo. Podemos obtener una aproximación al área de cada una de estas franjas, tomando el área del rectángulo que tiene la misma base de la franja y la altura igual al menor de los lados verticales. Asimismo, otra aproximación al área de la franja es el área del rectángulo con la misma base de la franja y la altura igual al mayor de los lados verticales.

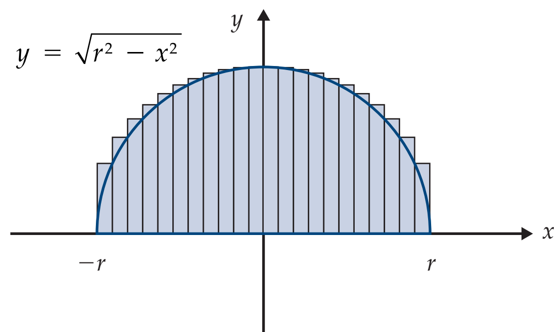



A la primera de las aproximaciones la llamaremos *aproximación inferior*, mientras que a la segunda la llamaremos *aproximación superior*.

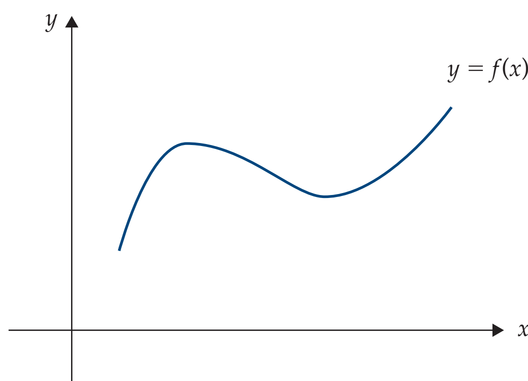
Sumando las aproximaciones inferiores de cada una de las franjas, es posible obtener una aproximación al área de la región, la cual es menor que el área de esta. Por otra parte, si sumamos las aproximaciones superiores obtendremos una aproximación al área de la región que será mayor que esta última.




Vamos a realizar el análisis de los cálculos antes descritos, sin embargo aprovecharemos para llevarlos a cabo para una situación más general.

En lo sucesivo supondremos $a < b$, cuando nos refiramos al intervalo cerrado $[a, b]$, por lo que esta condición no se hará explícita. Sea $f$ una función continua en un intervalo $[a, b]$. Supongamos que esta función sólo toma valores positivos, así que su gráfica lucirá como la de la figura siguiente.




Dividamos el intervalo $[a, b]$ en $n$ partes iguales. Esta división determina $n - 1$ puntos en el interior del intervalo, digamos que listados de menor a mayor son $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Adicionemos a esta colección de puntos interiores, los extremos $a$ y $b$ del intervalo $[a, b]$. Para uniformar la notación, escribamos $x_0 = a$ y $x_n = b$. Con esto tenemos una colección de $n + 1$ puntos en $[a, b]$, que escritos de menor a mayor son $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

La distancia entre dos puntos adyacentes de esta colección es

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Por ejemplo, para $i = 1$, $x_1 - x_0 = x_1 - a = \dfrac{b - a}{n}$ y para $i = n$, $x_n - x_{n-1} = b - x_{n-1} = \dfrac{b - a}{n}$.

Cada punto $x_i$ de esta colección puede representarse con la fórmula

$$x_i = a + i\,\frac{b - a}{n}, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

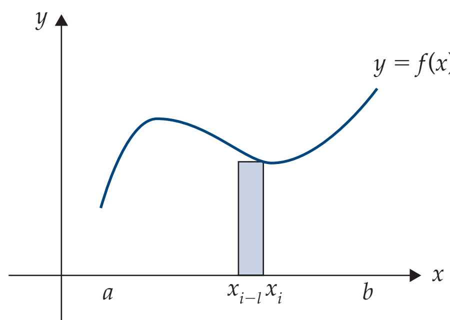
Estos puntos determinan $n$ subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de $[a, b]$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

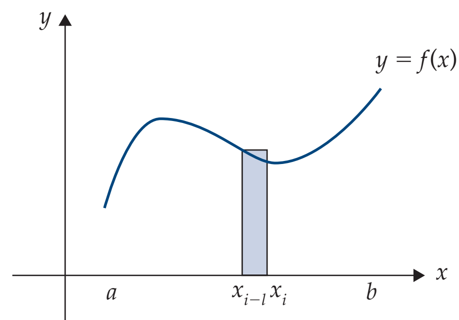
Dado que $f$ es continua en cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, la función toma un valor mínimo en $[x_{i-1}, x_i]$, al que llamaremos $m_i$, y un valor máximo, que denotaremos por $M_i$, esto es

$$m_i = \min_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \quad \text{y} \quad M_i = \max_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ consideremos el rectángulo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $m_i$, a tal rectángulo lo llamaremos **rectángulo inferior**. También consideremos el rectángulo con esa misma base pero con altura $M_i$, a este lo llamaremos **rectángulo superior**. Las áreas de los rectángulos inferior y superior son, respectivamente

$$s_i = (x_i - x_{i-1})m_i = m_i \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad S_i = (x_i - x_{i-1})M_i = M_i \frac{b-a}{n}$$

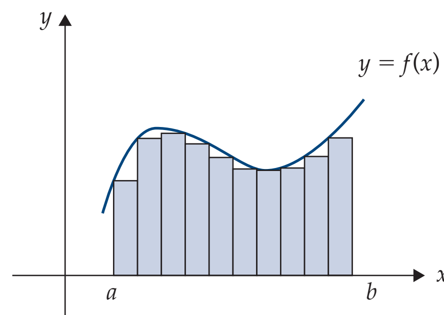


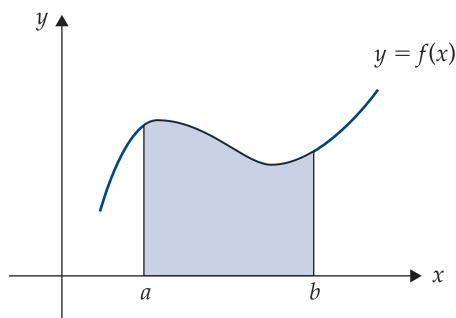

Ahora, adicionemos las áreas de los rectángulos inferiores, con lo que obtenemos

$$s(n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} m_i$$

Esta suma $s(n)$ de áreas de rectángulos depende de $n$, número de partes en las que se ha divido el intervalo $[a, b]$.



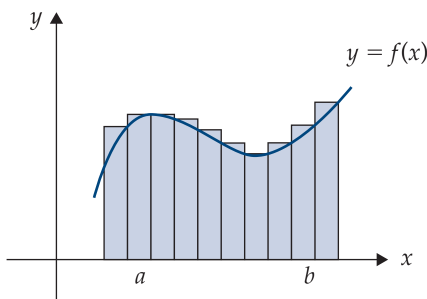

En la medida en la que se haga crecer el valor de $n$, esperaríamos que $s(n)$ se aproximara a algún valor límite, mismo que le asignaríamos al área de la región comprendida entre la gráfica de la función, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el intervalo $[a, b]$.



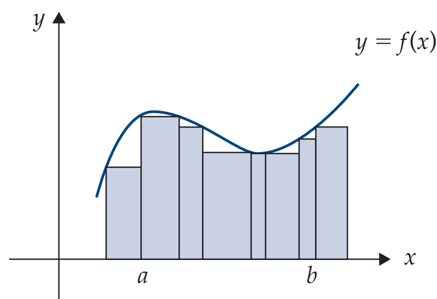

Se esperaría el mismo valor límite, si consideramos la suma de las áreas de los rectángulos superiores

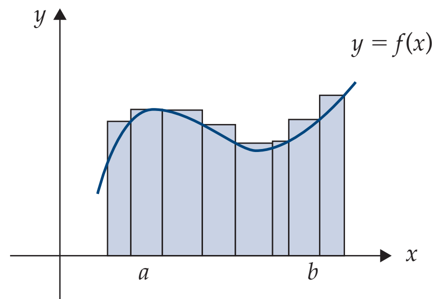
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}M_i,$$

y si hacemos crecer $n$ ilimitadamente



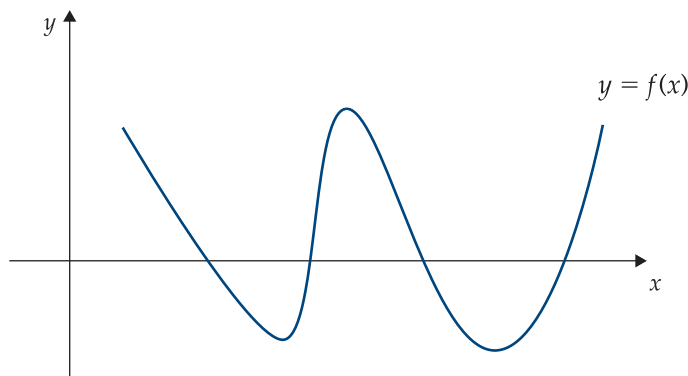

La prueba de que todo esto ocurre se basa fundamentalmente en la continuidad de $f$. De hecho, el resultado va más lejos. Una primera generalización es que los puntos $x_i$ no necesariamente tienen que ser equidistantes, es decir, no necesariamente dividen el intervalo $[a, b]$ en partes iguales.




Una generalización más, es que la altura de los rectángulos no necesariamente tiene que ser el valor mínimo o el valor máximo de la función en los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, podemos elegir como altura el valor de la función en un punto arbitrario $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de manera que los rectángulos obtenidos ya no sean ni inferiores ni superiores.

Finalmente, la construcción aritmética de las sumatorias anteriores y sus propiedades de convergencia se aplicarán a toda función continua y no será necesario suponer que la función es positiva.




# 1.3 Sumas superiores y sumas inferiores

Basados en las sumatorias antes descritas, estableceremos la definición de integral, pero antes hagamos algunas convenciones sobre notación y terminología.

### Definición

Una **partición** de un intervalo $[a, b]$, que denotamos por $\wp$, es toda colección finita de puntos $[a, b]$ ordenados de menor a mayor:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

En este caso, cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ recibe el nombre de **subintervalo** de la partición $\wp$.

Obsérvese que los extremos $a$ y $b$ del intervalo son puntos de la partición, de hecho se han denotado por $x_0 = a$ y $x_n = b$. De esta manera, con frecuencia escribiremos

$$\wp = \{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n\}$$

en el entendido de que $x_0 = a$ y $x_n = b$.

Sea ahora $f$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $\wp$ una partición de $[a, b]$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$; sea $m_i$ el valor mínimo de $f$ en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y sea $M_i$ el valor máximo de $f$ en el mismo subintervalo, es decir $m_i = \min\limits_{x_{i-1} \leq x \leq\ x_i} f(x)$ y $M_1 = \max\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dado que $f$ es continua, estos valores mínimo y máximo existen en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; esto es, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ existen $u_i$ y $v_i$ puntos de $[x_{i-1}, x_i]$ tales que:

$$m_i = f(u_i) \text{ y } M_i = f(v_i).$$

Estos son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de $f$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

En tanto, si $\wp=\{x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, las sumas:

$$s(f,\wp)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})m_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(u_i)$$

y

$$S(f,\wp)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})M_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(v_i)$$

reciben el nombre de **suma inferior** y **suma superior** respectivamente, asociadas a la partición $\wp$. En forma más simple, también podemos escribir estas sumas como:

$$s(f,\wp)=\sum_{\wp}(x_i-x_{i-1})m_i=\sum_{\wp}(x_i-x_{i-1})f(u_i)$$

y

$$S(f,\wp)=\sum_{\wp}(x_i-x_{i-1})M_i=\sum_{\wp}(x_i-x_{i-1})f(v_i).$$

En este caso, vamos a describir a los miembros de la derecha como sumatorias sobre la partición $\wp$.

Las sumas $s(\wp)$ y $S(\wp)$ dependen de los puntos $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n$ de la partición $\wp$ y cada una de estas es una aproximación de lo que esperamos sea el área de la región bajo la gráfica de la función $f:[a, b]\to\mathbb{R}$. Estas sumas serán mejores aproximaciones al área en la medida en la que los puntos adyacentes de la partición estén cercanos uno al otro. En la siguiente definición se precisan estas ideas.

### Definición

Si $\wp=\{x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, definimos la **malla** de la partición $\wp$ como el real positivo:

$$\delta(\wp)=\text{máx}\{x_i-x_{i-1}\,|\,i=1,2,\ldots,n\}.$$

Si tenemos una sucesión de particiones $\wp_1$, $\wp_2$, $\wp_3,\ldots$, y una función continua $f:[a, b]\to\mathbb{R}$, tendremos definidas dos sucesiones de reales $(s(\wp_k))$ y $(S(\wp_k))$ que dependerán de la sucesión de particiones $(\wp_k)$. Asociada a la sucesión de particiones $(\wp_k)$, también tenemos una sucesión de mallas $(\delta(\wp_k))=(\delta_k)$, que es una sucesión de reales positivos. Si bien los puntos de cada partición $\wp_n$ son arbitrarios de $[a, b]$, esperamos que existan los límites $\lim_{k\to\infty} s(\wp_k)$ y $\lim_{k\to\infty} S(\wp_k)$ si la sucesión de mallas $(\delta_k)$ tiende a cero cuando $k\to\infty$. En realidad, bajo esta condición, las sucesiones de sumas inferiores y superiores siempre tendrán límite, y será el mismo para ambas. En específico tenemos el siguiente teorema, mismo que se probará más adelante.

### Teorema

Sea $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ una función continua.

*a*) Si $\wp_1$, $\wp_2$, $\wp_3,\ldots$ es una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que la sucesión de mallas $(\delta_k)$ tiende a cero, entonces existen los límites siguientes:

$$\lim_{k\to\infty} s(\wp_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{\wp_k}(x_i-x_{i-1})m_i \text{ y } \lim_{k\to\infty} S(\wp_k)=\lim_{k\to\infty}\sum_{\wp_k}(x_i-x_{i-1})M_i$$

y ambos son iguales.

*b*) Si $\wp_1,\wp_2,\wp_3,\ldots$ y $\wp_1^*,\wp_2^*,\wp_3^*,\ldots$ son dos sucesiones de particiones del intervalo $[a, b]$ tales que las sucesiones de mallas correspondientes $(\delta_k)$ y $(\delta_k^*)$ tienden a cero, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} s(\wp_k) = \lim_{k\to\infty} s(\wp_k^*) \text{ y } \lim_{k\to\infty} S(\wp_k) = \lim_{k\to\infty} S(\wp_k^*).$$

En realidad probaremos un resultado más general, del cual el teorema anterior constituye un caso particular. La generalización consiste en que las sumas inferiores y superiores serán sustituidas por sumatorias más generales, llamadas sumas de Riemann.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)



Riemann nació en Breselenz, una aldea ubicada en la región de Hannover, que en la actualidad pertenece a Alemania. Tímido y enfermizo, murió de tuberculosis a los 40 años en Italia. La frágil salud de sus cinco hermanos y la mala alimentación constituyeron la causa principal de la muerte temprana de casi todos ellos y de su madre. Con el fin de convertirse en pastor y ayudar a su padre, quien tenía esa profesión, Riemann estudió teología en la Universidad de Gotinga. Después, se trasladó a Berlín a estudiar matemáticas, donde fue alumno de notables matemáticos como Jacobi y Dirichlet. Posteriormente, regresó a la Universidad de Gotinga, en donde fue profesor de matemáticas. Hizo importantes contribuciones a la teoría de funciones de variable compleja, geometría diferencial y teoría de números. Algunos de los conceptos más notables en la matemática llevan su nombre, como la geometría de Riemann, la superficie de Riemann y la función zeta de Riemann; esta última es de gran importancia en el estudio de la teoría de números. Otro concepto que también lleva su nombre es la integral de Riemann, la cual dio a conocer en 1854, a los 28 años, en un trabajo sobre representación de funciones mediante series de Fourier.

## 1.4 Sumas de Riemann

En casos específicos, el cálculo del límite de la sucesión de sumas inferiores:

$$\lim_{k\to\infty} s(\wp_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\wp_k} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

y el de las sumas superiores:

$$\lim_{k\to\infty} S(\wp_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\wp_k} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

pueden presentar alguna dificultad. En estos casos, podemos acudir a sumatorias en donde los mínimos, $m_i$, y los máximos, $M_i$, se reemplazan por el valor de la función en cualquier punto de $[x_{i-1}, x_i]$.

A continuación definimos estas sumatorias.

### Definición

Sea $\wp = \{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\wp$ elijamos un punto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. La sumatoria:

$$R(f, \wp) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

la llamamos **suma de Riemann**.

Esta sumatoria recibe su nombre en honor al ilustre matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), quien realizó importantes contribuciones al **análisis matemático**. Así que la $R$ en la notación de la sumatoria hace alusión a su nombre. Ahora, te resulta claro que las sumas superior e inferior son casos particulares de sumas de Riemann.

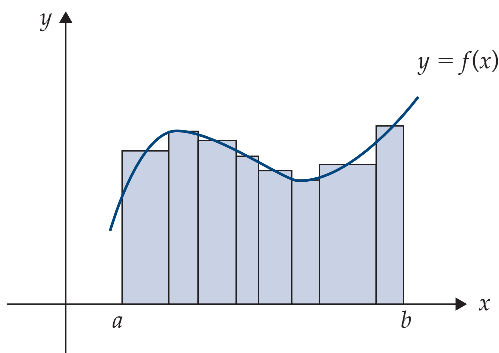
Una mejor notación para la suma de Riemann es:

$$R(f, \wp, \{t_1, \ldots, t_n\}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i).$$

En esta se hace explícita su dependencia de los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, mismos que tenemos libertad de elegir en los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Sin embargo, con el propósito de tener una notación más simple y cuando no dé lugar a confusión

escribiremos $R(f,\wp)$ en lugar de $R(f, \wp, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\})$; esta última resulta útil cuando consideremos dos sumas de Riemann para una misma partición, por ejemplo: $R(f, \wp, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\})$ y $R(f, \wp, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\})$. Pero, si consideramos dos sumas de Riemann correspondientes a dos particiones $\wp_1$ y $\wp_2$ diferentes, una suma para cada partición, será suficiente escribir $R(f,\wp_1)$ y $R(f,\wp_2)$.

Para funciones positivas, una suma de Riemann es igual a la suma de las áreas de rectángulos con base en los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y la altura de los valores de la función $f(t_i)$, en puntos $t_i$ que elegimos de manera arbitraria en estos subintervalos. Las alturas $f(t_i)$ no necesariamente son valores mínimos o máximos de la función en los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, como se ilustra en la siguiente figura.




## 1.5 Existencia de la integral de una función continua

Para enunciar y probar el teorema antes prometido, primero probaremos que para toda sucesión de particiones $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$ de $[a, b]$ tal que $\lim_{k\to\infty} \delta(\wp_k) = 0$, cualquier sucesión de sumas de Riemann:

$$R(f,\wp_k)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(t_i)$$

es convergente. Después probaremos que el límite no depende de la sucesión particular de particiones $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$ ni de la selección de puntos intermedios $t_i$, esto lo formulamos en los dos siguientes lemas, para cuyas pruebas será importante la continuidad uniforme de $f$ en $[a, b]$, misma que recordamos más adelante. Que $f$ sea uniformemente continua en $[a, b]$ significa que dada cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $x, y \in [a, b]$ cumplan $|x - y| < \delta$.

### Lema 1

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ con la propiedad de que para cualquier par de particiones $\wp$ y $\wp^*$ de $[a, b]$ con $\wp \subset \wp^*$ y mallas $\delta(\wp)$ y $\delta(\wp^*)$ menores que $\delta$ se tiene:

$$\left|R(f,\wp)-R(f,\wp^*)\right| \quad < \quad \varepsilon(b-a)$$

para cualesquiera sumas de Riemann $R(f, \wp)$ y $R(f, \wp^*)$ asociadas a las particiones $\wp$ y $\wp^*$, respectivamente.

**Nota**

Que las sumas de Riemann $R(f, \wp)$ y $R(f, \wp^*)$ sean cualesquiera significa que los puntos que se eligen en los subintervalos de las particiones $\wp$ y $\wp^*$ son arbitrarios; esto significa que la desigualdad no depende de la elección de estos puntos.

### Demostración

Para la $\varepsilon > 0$ dada, elijamos $\delta > 0$, que cumpla con la definición de continuidad uniforme; es decir, siempre que se tengan dos puntos $x, y \in [a, b]$ que cumplan $|x - y| < \delta$ se tendrá $|f(x)-f(y)|< \varepsilon$.

Ahora, supongamos:

$$\wp^* = \{y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{N-1} < y_N\}$$

y

$$\wp = \{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n\}$$

dos particiones de $[a, b]$ cuyas mallas son menores que $\delta$. Entonces, tenemos $x_j - x_{j-1} < \delta$ para $j=1,\ldots, n$ y también $y_i - y_{i-1} < \delta$ para $i=1,\ldots, N$. Ahora, sean dos sumas de Riemann:

$$R(f, \wp^*) = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)(y_i - y_{i-1})$$

y

$$R(f, \wp) = \sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Para cualesquiera índices $i, j$ se tiene $t_i \in [y_{i-1}, y_i]$ y $s_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Como todo punto $x_j$ de la partición $\wp$ lo es de $\wp^*$, y esta última partición puede tener otros puntos más, entonces en el interior de cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ habrá, en general, puntos $y_i$ de $\wp^*$. Ahora, consideremos cualquiera de los sumandos de la suma de Riemann:

$$R(f, \wp) = \sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Sea este sumando $f(s_j)(x_j - x_{j-1})$ y supongamos que para el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ se tiene:

$$x_{j-1} = y_k < y_{k+1} < \cdots < y_{m-1} < y_m = x_j.$$

Comparemos $f(s_j)(x_j - x_{j-1})$ con la sumatoria correspondiente:

$$(y_{k+1} - y_k) f(t_{k+1}) + (y_{k+2} - y_{k+1}) f(t_{k+2}) + \cdots + (y_m - y_{m-1}) f(t_m) = \sum_{j=k+1}^{m} (y_j - y_{j-1}) f(t_j)$$

la cual es parte de la suma de Riemann:

$$R(f, \wp^*) = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Primero, observemos que:

$$x_j - x_{j-1} = y_m - y_k = \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}).$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}(x_j - x_{j-1}) f(s_j) - \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) &= (y_m - y_k) f(s_j) - \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}) f(s_j) - \sum_{j=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}) f(t_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1})\big(f(s_j) - f(t_i)\big)\end{aligned}$$

Por tanto, dado que $x_j - x_{j-1} < \delta$ también se tiene $|s_j - t_i| < \delta$ para toda $i = k+1, \ldots, m$, de donde tenemos $|f(s_j) - f(t_i)| < \varepsilon$. Luego, tenemos:

$$\begin{aligned}\left|(x_j - x_{j-1}) f(s_j) - \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}) f(t_i)\right| &\leq \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}) \left| f(s_j) - f(t_i)\right| \\ &< \varepsilon \sum_{i=k+1}^{m} (y_i - y_{i-1}) \\ &= \varepsilon (y_m - y_k) \\ &= \varepsilon (x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Si aplicamos esta desigualdad para cada uno de los sumandos $f(s_j)(x_j - x_{j-1})$ de la suma $R(f, \wp) = \sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j - x_{j-1})$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left|R(f, \wp) - R(f, \wp^*)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{i=1}^{N} f(t_i)(y_i - y_{i-1})\right| \\ &< \sum_{j=1}^{n} \varepsilon (x_j - x_{j-1}) \\ &= \varepsilon (b - a).\end{aligned}$$

Esto prueba el lema 1.

Si todos los puntos de una partición $\wp$ son puntos de otra $\wp^*$, se dice que $\wp^*$ es un **refinamiento** de $\wp$ y que $\wp^*$ es **más fina** que $\wp$. En palabras simples, un refinamiento de una partición $\wp$ se obtiene agregando puntos a $\wp$. Es evidente que si la malla de $\wp$ es menor que $\delta$, la malla del refinamiento $\wp^*$ también es menor que $\delta$. En estos términos, el lema 1 está formulado para todo par de particiones $\wp$ y $\wp^*$, siendo $\wp^*$ un refinamiento de $\wp$.

En el siguiente lema comparamos dos sumas de Riemann asociadas a dos particiones no necesariamente una refinamiento de la otra.

### Lema 2

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ con la propiedad de que para cualquier par de particiones $\wp_1$ y $\wp_2$ de $[a, b]$ con mallas $\delta(\wp_1)$ y $\delta(\wp_2)$ menores que $\delta$ se tiene:

$$\left|R(f, \wp_1) - R(f, \wp_2)\right| < 2\varepsilon (b - a)$$

para cualesquiera sumas de Riemann $R(f, \wp_1)$ y $R(f, \wp_2)$ asociadas a las particiones $\wp_1$ y $\wp_2$, respectivamente.

### Demostración

Para la $\varepsilon > 0$ dada, sea $\delta > 0$ la proporcionada por el lema 1. Sean $\wp_1$ y $\wp_2$ particiones de $[a, b]$ con mallas $\delta(\wp_1)$ y $\delta(\wp_2)$ menores que $\delta$. Sea $\wp^*$ la partición que resulta de unir ambas particiones, es decir $\wp^* = \wp_1 \cup \wp_2$. La partición $\wp^*$ es un refinamiento de cada una de estas, que es un refinamiento común, así que también su malla es menor que $\delta$. Entonces, por el lema 1 tenemos que para cualesquiera sumas de Riemann $R(f, \wp_1)$ y $R(f, \wp_2)$ se tiene:

$$|R(f, \wp_1) - R(f, \wp^*)| < \varepsilon\,(b-a) \quad \text{y} \quad |R(f, \wp_2) - R(f, \wp^*)| < \varepsilon\,(b-a)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\left|R(f,\wp_1)-R(f,\wp_2)\right| &= \left|R(f,\wp_1)-R(f,\wp^*)+R(f,\wp^*)-R(f,\wp_2)\right| \\ &\le \left|R(f,\wp_1)-R(f,\wp^*)\right|+\left|R(f,\wp^*)-R(f,\wp_2)\right| \\ &< \varepsilon(b-a)+\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Es decir:

$$\left|R(f,\wp_1)-R(f,\wp_2)\right|<2\varepsilon(b-a).$$

Esto prueba el lema 2.

Ahora, estamos en posibilidad de probar el siguiente teorema, que es fundamental para poder entrar al tema de la integral de una función continua.

### Teorema

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$ cualquier sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que la sucesión de mallas tiende a cero, es decir $\lim_{k\to\infty}\delta(\wp_k)=0$. Entonces, cualquier sucesión de sumas de Riemann asociadas a estas particiones:

$$R(f,\wp_k)=\sum_{\wp_k}(x_i-x_{i-1})\,f(t_i)$$

tiene límite; es decir, existe:

$$\lim_{k\to+\infty} R(f,\wp_k).$$

### Demostración

Para probar que cualquier sucesión de sumas de Riemann tiene límite, aplicaremos el criterio de Cauchy. Mediante el uso del lema 2 nos será posible probar que la sucesión de reales:

$$R_k=R(f,\wp_k)=\sum_{\wp_k}(x_i-x_{i-1})\,f(t_i)$$

satisface la condición de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ la dada por el lema 2. Entonces, dado que $\lim_{k\to\infty}\delta(\wp_k)=0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\delta(\wp_k) < \delta$ para todo natural $k \ge N$. Si $n$ y $m$ son mayores que $N$, se tiene $\delta(\wp_n) < \delta$ y $\delta(\wp_m) < \delta$. Por tanto, del lema 2 se sigue que:

$$\left|R(f,\wp_n)-R(f,\wp_m)\right|\le 2\varepsilon(b-a).$$

Esto prueba que la sucesión $(R_k)$ cumple la condición de Cauchy; por tanto, existe:

$$\lim_{k\to\infty} R(f,\wp_k).$$

Esto prueba el teorema.

Ahora probemos que el límite del teorema anterior no depende de la sucesión de particiones ni de los puntos $t_i$ que se elijan en los subintervalos de las particiones.

### Teorema

Sean $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$ y $\wp_1^*, \wp_2^*, \wp_3^*, \ldots$ dos sucesiones de particiones de $[a, b]$ tales que las respectivas sucesiones de mallas tienden a cero, es decir, $\lim_{k\to\infty}\delta(\wp_k)=0$ y $\lim_{k\to\infty}\delta(\wp_k^*)=0$. Sean:

$$R(f,\wp_k)=\sum_{\wp_k}(x_i-x_{i-1})f(t_i) \text{ y } R(f,\wp_k^*)=\sum_{\wp_k^*}(y_j-y_{j-1})f(s_j)$$

dos sucesiones de sumas de Riemann, asociadas respectivamente a las dos sucesiones de particiones $(\wp_k)$ y $(\wp_k^*)$. Entonces:

$$\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k)=\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k^*).$$

**Demostración**

Para probar que ambos límites son iguales, probaremos que el valor absoluto de su diferencia es menor que cualquier número positivo, es decir, probaremos que siempre que se dé un número $\varepsilon_1 > 0$ se cumple la desigualdad:

$$\left|\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k)-\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k^*)\right|\le\varepsilon_1 .$$

Así, tendremos:

$$0\le\left|\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k)-\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k^*)\right|\le\varepsilon_1$$

para todo número positivo $\varepsilon_1$. Pero esto solo es posible si $\left|\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k)-\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k^*)\right|=0$. Procedamos pues con esta prueba. Sea $\varepsilon_1$ cualquier número positivo y definamos $\varepsilon > 0$, mediante la igualdad $\varepsilon_1=2\varepsilon(b-a)$, es decir definamos $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon_1}{2(b-a)}$.

Esta $\varepsilon$ la utilizaremos para aplicar el lema 2. Tomemos la $\delta > 0$ del lema 2; como $\lim_{k\to\infty}\delta(\wp_k)=0$ y $\lim_{k\to\infty}\delta(\wp_k^*)=0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $k \ge N$ se cumplen las dos desigualdades $\delta(\wp_k)<\delta$ y $\delta(\wp_k^*)<\delta$. Por tanto, por el lema 2, se sigue que:

$$\left|R(f,\wp_k)-R(f,\wp_k^*)\right|<2\varepsilon(b-a).$$

Es decir:

$$\left|R(f,\wp_k)-R(f,\wp_k^*)\right|<\varepsilon_1.$$

Tomando límites, obtenemos:

$$\lim_{k\to\infty}\left|R(f,\wp_k)-R(f,\wp_k^*)\right|\le\varepsilon_1$$
$$\left|\lim_{k\to\infty}\left(R(f,\wp_k)-R(f,\wp_k^*)\right)\right|\le\varepsilon_1.$$

O sea:

$$\left|\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k)-\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k^*)\right|\le\varepsilon_1.$$

Lo cual es lo que deseábamos probar. De esto se sigue que:

$$\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k)=\lim_{k\to\infty}R(f,\wp_k^*).$$

Esto demuestra el teorema.

Del teorema anterior establecemos el resultado final.

## Teorema y definición

Sea $f$ continua en el intervalo $[a, b]$. Sea $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$ una sucesión de particiones del mismo intervalo tales que la sucesión de mallas correspondiente tiende a cero. Entonces, toda sucesión de sumas de Riemann:

$$R(f, \wp_k) = \sum_{\wp_k} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

asociadas a esta sucesión de particiones tiene límite, el cual es independiente de la sucesión de particiones y de los puntos $t_i$ elegidos en los subintervalos de cada partición $\wp_k$. A este límite común se le llama la **integral** de la función $f$ en el intervalo $[a, b]$ y se le denota por $\int_a^b f(x)dx$, es decir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} R(f, \wp_k).$$

En esta simbología, a la función $f$ se le llama **integrando**; al punto $a$, **límite inferior** de la integral, y al punto $b$, **límite superior**.

Del teorema anterior se desprende que la integral de una función puede calcularse mediante el uso de sucesiones de sumas inferiores o del uso de sucesiones de sumas superiores; de hecho, puede usarse cualesquier sucesión de sumas de Riemann, con tal de que la sucesión de mallas de las particiones tienda a cero. En forma simple, podemos enunciar este resultado:

Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889)



Nació en Ucrania y murió en Rusia. Se doctoró en París trabajando con Cauchy. Bunyakovsky hizo importantes contribuciones a la teoría de números, por ejemplo es ampliamente citado en el famoso libro de Dickson sobre la historia de la teoría de números. En el mundo occidental no se le da crédito por el descubrimiento de la famosa desigualdad de Cauchy-Schwarz, la cual en otras partes del mundo conocen como desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. Trabajó en mecánica aplicada, hidrostática y geometría. Bunyakovsky quizá no es recordado por su famosa desigualdad, sino por el premio que fue instituido con su nombre y que otorga la Academia de Ciencias de Petersburgo a los autores de trabajos matemáticos sobresalientes.

## Teorema

Sea $f$ continua en el intervalo $[a,b]$. Sea $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$ cualquier sucesión de particiones de $[a, b]$ tales que la sucesión de mallas correspondiente tiende a cero. Para cada partición $\wp_k$ elijamos una suma de Riemann $R(f, \wp_k)$. Entonces, existe $\lim_{k\to\infty} R(f, \wp_k)$ y además $\lim_{k\to\infty} R(f, \wp_k) = \int_a^b f(x)dx$.

Este teorema nos dice que cualquier sucesión de sumas de Riemann va igual de bien para calcular la integral de una función continua, debido a que cualquier sucesión de sumas de Riemann nos conduce a la integral de $f$ sobre $[a, b]$, con tal de que la sucesión de mallas tienda a cero. En particular, podemos tomar particiones que resulten de dividir el intervalo en partes iguales y tomar como altura de los rectángulos los valores de la función en los extremos izquierdos de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ o en los extremos derechos, es decir podemos tomar como altura cualquiera de los valores $f(x_{i-1})$ o $f(x_i)$, como se expresó en el teorema enunciado al inicio de la sección 1.3. Por ejemplo, tenemos el siguiente teorema.

## Teorema

Sea $f$ continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

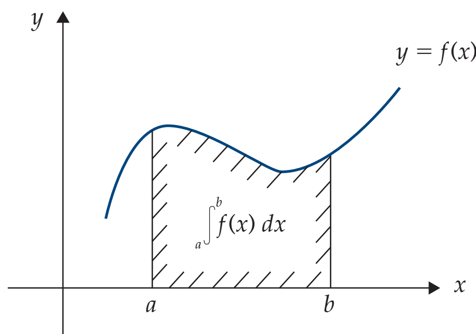
## Nota sobre terminología

### Integral definida

En algunos libros de cálculo que existen en la actualidad, a la integral de $f$ sobre el intervalo $[a, b]$, los autores suelen llamarle **integral definida** de $f$ de $a$ a $b$. Nosotros preferimos llamarle simplemente **integral** o **integral sobre el intervalo** $[a, b]$, sin ningún calificativo. La razón por la cual algunos autores le llaman integral definida se debe a que también existe el concepto de integral indefinida, que estudiamos en los dos capítulos siguientes, así que para distinguir estos dos conceptos los autores acuden a los adjetivos calificativos definida e indefinida, respectivamente. Por otra parte, consideramos pertinente alertar al lector acerca del concepto de integral indefinida en el sentido en que suelen encontrarse en los libros de cálculo al menos dos acepciones de este término. Una acepción se refiere a una función $F$, cuya derivada es la función dada $f$; es decir, $F$ es una integral indefinida en un intervalo si $F'(x)=f(x)$ para toda $x$ en el intervalo. Otra acepción es la que se refiere a la familia de todas las funciones $F$ que satisfacen $F' = f$ y no solo a una de estas funciones, así que en esos casos la integral indefinida es una familia de funciones y no una función particular. Asimismo, otra acepción de integral indefinida es la que estudiamos en el siguiente capítulo, dedicado al teorema fundamental del cálculo.

## 1.6 Integral como área

Cuando la función es no negativa, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es por definición el área de la región comprendida entre la gráfica de $f$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje de las abscisas. Precisamente, uno de los lados de esta región es el segmento en el eje de las abscisas correspondiente al intervalo $[a, b]$.




Cuando la función $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ es no negativa, cada suma de Riemann $R(f, \wp)=\sum_{j=1}^{n} f(s_j)(x_j - x_{j-1})$ también es no negativa; de hecho, las sumas de Riemann son positivas si la función no negativa toma valores positivos. Una suma de Riemann positiva se logra si tomamos al menos un valor $f(s_j)$ positivo. Entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$, que es el límite de sucesiones de sumas de Riemann, es mayor o igual que cero. Esto es, si $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces:

$$R(f, \wp_k) \geq 0 \text{ para todo natural } k.$$

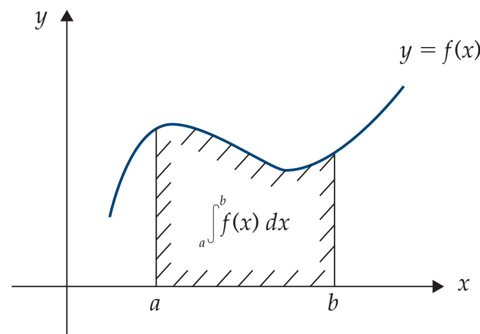
y

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} R(f, \wp_k) \geq 0.$$

Se puede probar que si una función continua $f{:}[a, b] \to \mathbb{R}$ es no negativa, basta que en algún punto tome un valor positivo para que la integral sea positiva

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Cuando la función es no negativa, la interpretación geométrica de cada suma de Riemann es una suma de áreas de rectángulos, al tiempo que cada suma de Riemann es una aproximación al área de la región comprendida entre la gráfica de la función, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Por esta razón decimos que la integral es el área misma de esa región.




Por su parte, cuando la función es negativa o no positiva, las sumas de Riemann son menores o iguales que cero. Entonces, en este caso la integral es menor o igual que cero; es decir, si $f(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces:

$$R(f, \wp_k) \leq 0 \text{ para todo natural } k.$$

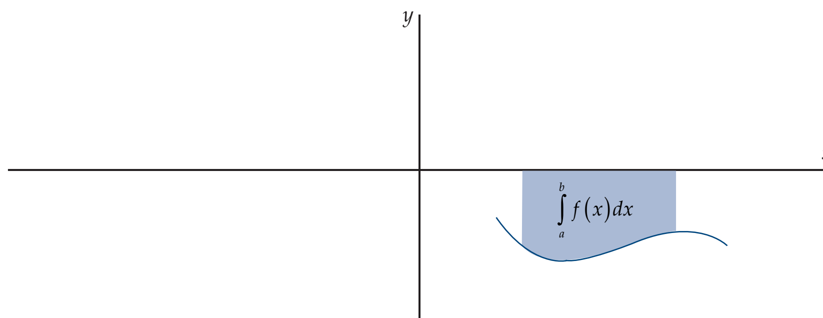
y

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} R(f, \wp_k) \leq 0.$$

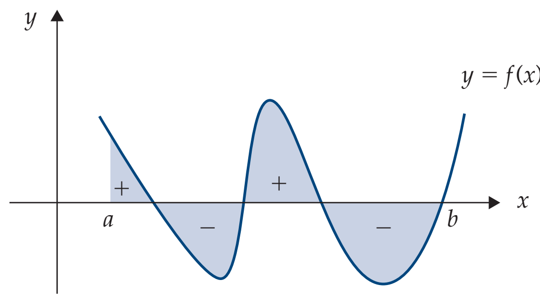
Como en el caso anterior, si $f(x) \leq 0$ para toda $x \in [a, b]$ y $f$ es negativa al menos en un punto de $[a, b]$, entonces la integral es negativa:

$$\int_a^b f(x)dx < 0.$$

En este caso diremos que la integral es igual al área con signo de la región comprendida entre la gráfica de la función y el eje de las abscisas.



Si la función toma valores positivos, negativos y cero, entonces la integral es la suma algebraica de las áreas con signo de las diferentes regiones que constituyen la región total. Las regiones que se encuentran por abajo del eje de las abscisas tienen área con signo negativo, mientras que las que están por arriba del mismo, tienen signo positivo. Si la suma algebraica de las áreas es cero, entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ es igual a cero. Es importante recordar que la integral $\int_a^b f(x)dx$ representa un área solamente cuando $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$.




### Ejemplo 1

Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado. Como siempre, suponemos $a < b$. Sea la función identidad $f(x) = x$, definida en este intervalo. Calculemos la integral de $f$ en $[a, b]$. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en $n$ partes iguales, donde $n$ es un entero positivo. Entonces, tenemos la partición

$$\wp_n: x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, x_3 = a + 3\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b.$$

La malla de $\wp_n$ es $\delta(\wp_n) = \dfrac{b-a}{n}$ así que $\delta(\wp_n) \to 0$.

Sea la suma de Riemann

$$\begin{aligned} R(f, \wp_n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} a + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 i \\ &= n\frac{b-a}{n} a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i \\ &= (b-a)a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i. \end{aligned}$$

De la conocida fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
R(f,\wp_n) &= (b-a)a + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i \\
&= (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n) &= \lim_{n\to\infty}(b-a)a + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2 \\
&= ba - a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab + \frac{1}{2}a^2 \\
&= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.
\end{aligned}
$$

De donde tenemos

$$
\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.
$$

### Ejemplo 2

Consideremos la función $f(x) = x^2$, definida en un intervalo $[a, b]$. Sea $n$ un natural y dividamos $[a, b]$ en $n$ partes iguales. Entonces, tenemos la partición

$$
\wp_n\colon x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n},\ x_3 = a + 3\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n = b.
$$

Para simplificar momentáneamente la notación, escribamos $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Sea la suma de Riemann

$$
\begin{aligned}
R(f,\wp_n) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h\big(a + (i-1)h\big)^2 \\
&= h\sum_{i=1}^{n}\big(a^2 + 2a(i-1)h + (i-1)^2h^2\big) \\
&= h\left[\sum_{i=1}^{n}a^2 + 2ah\sum_{i=1}^{n}(i-1) + h^2\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\right].
\end{aligned}
$$

Dado que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i-1) &= \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2} \\
\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 &= \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
\sum_{i=1}^{n}a^2 &= na^2
\end{aligned}
$$

tenemos

$$R(f,\wp_n) = h\left[na^2 + 2ah\frac{(n-1)n}{2} + h^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$
$$= (b-a)a^2 + 2a\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= (b-a)a^2 + a(b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

Por tanto,

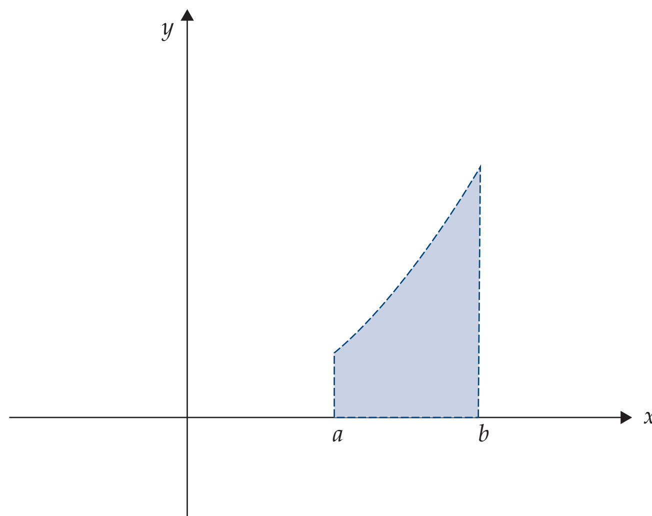
$$\lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n) = \lim_{n\to\infty}\left[(b-a)a^2 + a(b-a)^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{6}2$$
$$= ba^2 - a^3 + ab^2 - 2a^2b + a^3 + \frac{1}{3}b^3 - b^2a + ba^2 - \frac{1}{3}a^3.$$

Al simplificar, finalmente obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n) = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

Por consiguiente, obtenemos

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$




## Ejemplo 3

Continuando con la misma línea de ideas de los ejemplos anteriores, tratemos de hallar la integral $\int_a^b x^k dx$, donde $k$ es un entero positivo. Supongamos, en este caso, $0 < a < b$. Sea $n$ un entero positivo y dividamos el intervalo $[a, b]$ en $n$ partes iguales. Hagamos $h = \frac{b-a}{n}$; entonces, tenemos la partición

$$\wp_n: x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, x_3 = a + 3h, \ldots, x_n = b.$$

Consideremos la suma de Riemann

$$\begin{aligned} R(f, \wp_n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} h(a + ih)^k \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( a + i\frac{b-a}{n} \right)^k. \end{aligned}$$

Para calcular la integral debemos hallar el límite $\lim_{n\to\infty} R(f, \wp_n)$, para lo cual será necesario desarrollar la sumatoria, como en los casos $k = 1$ y $k = 2$ de los ejemplos anteriores. Sin embargo, el problema se torna difícil pues en este caso debemos calcular la sumas $\sum_{i=1}^{n} i^2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} i^k$, así que procederemos de otra manera. Primero, elegiremos una sucesión de particiones que construiremos de manera diferente, así que ahora estas ya no consistirán de puntos equidistantes. Sea $r = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ o sea $r^n = \frac{b}{a}$. Como $0 < a < b$ tenemos, $\frac{b}{a} > 1$, luego resulta $r = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$. De esto se sigue que

$$\begin{gathered} 1 < r \\ a < ar \\ ar < ar^2 \\ ar^2 < ar^3 \\ \vdots \\ ar^{n-1} < ar^n = b. \end{gathered}$$

Sea la partición

$$\wp_n: x_0 = a, x_1 = ar, x_2 = ar^2, \ldots, x_{n-1} = ar^{-1}, x_n = ar^n = a\frac{b}{a} = b.$$

Para cada natural $n$, calculemos la malla $\delta(\wp_n) = \max_{1\le i\le n} = (x_i - x_{i-1})$. Como $x_i = ar^i$, para $i = 0,\ldots, n$ tenemos

$$x_i - x_{i-1} = ar^i - ar^{i-1} = ar^{i-1}(r-1).$$

Y dado que $a < ar < ar^2 <\ldots, < ar^{n-1} < ar^n$, tenemos

$$\max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) = \max_{1\le i\le n} ar^{i-1}(r-1) = ar^{n-1}(r-1) = ar^n \frac{r-1}{r}.$$

Recordemos que $r^n = \frac{b}{a}$; por tanto, tenemos $\max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) = b\frac{r-1}{r}$. Entonces

$$\delta(\wp_n) = b\frac{r-1}{r}.$$

Así, como $\lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \delta(\wp_n) = \lim_{n\to\infty} b\frac{r-1}{r} = 0.$

Para cada $n$, consideremos la suma de Riemann

$$\begin{aligned}
R(f,\wp_n) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(ar^i - ar^{i-1})(ar^i)^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} ar^i\left(1 - \frac{1}{r}\right)a^k r^{ik} \\
&= a^{k+1}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{n} r^i r^{ik} \\
&= a^{k+1}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{n} r^{(k+1)i}.
\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula para la suma geométrica, obtenemos

$$\begin{aligned}
R(f,\wp_n) &= a^{k+1}(1 - \frac{1}{r})\sum_{i=1}^{n} r^{(k+1)i} \\
&= a^{k+1}(1 - \frac{1}{r})r^{k+1}\sum_{i=0}^{n-1} r^{(k+1)i} \\
&= a^{k+1}(1 - \frac{1}{r})r^{k+1}\frac{r^{(k+1)n} - 1}{r^{k+1} - 1} \\
&= a^{k+1}\frac{r-1}{r}r^{k+1}\frac{r^{(k+1)n} - 1}{r^{k+1} - 1} \\
&= a^{k+1}(r-1)r^k\frac{r^{(k+1)n} - 1}{r^{k+1} - 1}.
\end{aligned}$$

Dado que $ar^n = \frac{b}{a}$, la fórmula anterior se escribe

$$\begin{aligned}
R(f,\wp_n) &= a^{k+1}(r-1)r^k\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1}{r^{k+1} - 1} \\
&= a^{k+1}(r-1)r^k\frac{\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{a^{k+1}}}{r^{k+1} - 1} \\
&= \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)\frac{r-1}{r^{k+1} - 1}r^k.
\end{aligned}$$

Usando nuevamente la fórmula para la suma geométrica, tenemos

$$\frac{r-1}{r^{k+1}-1} = \frac{1}{1+r+r^2+\ldots+r^k}.$$

De donde podemos escribir

$$R(f,\wp_n) = \left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\frac{r^k}{1+r+r^2+\ldots+r^k}.$$

Recordemos que $r = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Entonces, dado que $\lim_{n\to\infty} r = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1$; por tanto, también $\lim_{n\to\infty} r^i = 1$, por tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\frac{r^k}{1+r+r^2+\ldots+r^k} \\
&= \left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{r^k}{1+r+r^2+\ldots+r^k} \\
&= \left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\frac{\lim_{n\to\infty} r^k}{\lim_{n\to\infty}(1+r+r^2+\ldots+r^k)} \\
&= \left(b^{k+1}-a^{k+1}\right)\frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Esto prueba que

$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right),$$

donde se supone $0 < a < b$.

Aun cuando la fórmula anterior se ha deducido para el caso especial $0 < a < b$, en el siguiente capítulo se probará, de una manera mucho más simple, que la fórmula vale para cualesquiera $a$ y $b$ con $a < b$.

### Ejemplo 4

Calculemos la integral $\int_a^b \operatorname{sen} x dx$, donde $a$ y $b$ son dos reales cualesquiera con $a < b$. Para cada entero positivo $n$, sea la partición de puntos equidistantes

$$\wp_n: x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, x_3 = a + 3h, \ldots, x_n = b$$

donde $h = \frac{b-a}{n}$. Consideremos la sucesión de sumas de Riemann

$$\begin{aligned}
R(f,\wp_n) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h \operatorname{sen}(a+hi) \\
&= h\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}(a+hi).
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$R(f, \wp_n) = h[\operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) + \operatorname{sen}(a+3h) + \cdots + \operatorname{sen}(a+nh)].$$

Para transformar esta sumatoria, recurriremos a la identidad trigonométrica

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

Multipliquemos y dividamos por $2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}$, con lo que tenemos

$$R(f, \wp_n) = \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[2 \operatorname{sen}(a+h) \operatorname{sen} \frac{h}{2} + 2 \operatorname{sen}(a+2h) \operatorname{sen} \frac{h}{2} + \cdots + 2 \operatorname{sen}(a+nh) \operatorname{sen} \frac{h}{2}\right]$$

$$R(f, \wp_n) = \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\left(\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{3}{2}h\right)\right) + \left(\cos\left(a + \frac{3}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{5}{2}h\right)\right) + \cdots + \left(\cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2n+1}{2}h\right)\right)\right].$$

Lo cual se simplifica como

$$\begin{aligned} R(f, \wp_n) &= \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2n+1}{2}h\right)\right] \\ &= \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(a + nh + \frac{1}{2}h\right)\right] \end{aligned}$$

es decir,

$$R(f, \wp_n) = \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(b + \frac{1}{2}h\right)\right]$$

pues $h = \frac{b-a}{n}$ o sea $nh = b - a$.

En el capítulo 5 del libro de Cálculo diferencial, probamos que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, por lo que tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} R(f, \wp_n) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a + \frac{1}{2}h\right) - \cos\left(b + \frac{1}{2}h\right)\right] = \cos a - \cos b.$$

Con esto obtenemos

$$\int_a^b \operatorname{sen} x dx = -(\cos b - \operatorname{sen} a).$$

**Ejemplo 5**

Se deja como ejercicio para el lector, siguiendo un procedimiento como el del ejemplo anterior, obtener la fórmula

$$\int_a^b \cos x dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$$

# 1.7 Propiedades básicas de la integral

Los siguientes teoremas nos facilitarán el cálculo de integrales.

## 1.7.1 Teorema (linealidad de la integral)

Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y $k$ una constante. Entonces

*a*) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

*b*) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

A estas dos propiedades se les conoce como *propiedades de linealidad* de la integral.

**Demostración**

Probemos el inciso *a*): Mostremos que para alguna sucesión de particiones $(\wp_n)$ de $[a, b]$ tal que $\delta(\wp_n) \to 0$ y alguna sucesión de sumas de Riemann $R(f+g, \wp_n)$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} R(f+g, \wp_n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Sea $\wp_n$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que $\delta(\wp_n) \to 0$.

Sea $R(f, \wp_n) = \sum_{\wp_n}(x_i - x_{i-1})f(t_i)$ una sucesión de sumas de Riemann para $f$. Sea $R(g, \wp_n) = \sum_{\wp_n}(x_i - x_{i-1})g(t_i)$ la correspondiente sucesión de sumas de Riemann para $g$, que es la asociada a la misma sucesión de particiones y a los mismos puntos $t_i$ de los subintervalos. Por el teorema anterior, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} R(f, \wp_n) = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} R(g, \wp_n) = \int_a^b g(x)dx.$$

Además, dado que

$$\begin{aligned} R(f+g,\wp_n) &= \sum_{\wp_n}(x_i - x_{i-1})(f+g)(t_i) \\ &= \sum_{\wp_n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) + \sum_{\wp_n}(x_i - x_{i-1})g(t_i) \\ &= R(f,\wp_n) + R(g,\wp_n) \end{aligned}$$

resulta

$$\lim_{n\to\infty} R(f+g,\wp_n) = \lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n) + \lim_{n\to\infty} R(g,\wp_n).$$

O sea

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

La prueba del inciso *b*) es de igual modo simple. Si $R(f,\wp_n) = \sum_{\wp_n^{(1)}}(x_i - x_{i-1})f(t_i)$ es una sucesión de sumas de Riemann para $f$ y $R(kf,\wp_n) = \sum_{\wp_n^{(1)}}(x_i - x_{i-1})(kf)(t_i)$ es la correspondiente para $kf$, entonces tenemos

$$R(kf,\wp_n) = \sum_{\wp_n}(x_i - x_{i-1})(kf)(t_i) = k\sum_{\wp_n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) = kR(f,\wp_n).$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} R(kf,\wp_n) = k\lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n),$$

es decir

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Esto prueba el teorema.

### Ejemplo 6

Usando el teorema anterior y algunos de los ejemplos que ya hemos visto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx &= \int_a^b \alpha x^2 dx + \int_a^b \beta x dx + \int_a^b \gamma dx \\ &= \alpha\int_a^b x^2 dx + \beta\int_a^b x dx + \gamma\int_a^b dx \\ &= \alpha\left(\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3\right) + \beta\left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2\right) + \gamma(b-a). \end{aligned}$$

### Teorema

Sea $f$ continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in = [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

### Demostración

La prueba es muy simple. Sea $(\wp_n)$ cualquier sucesión de particiones cuya sucesión de mallas $(\delta(\wp_n))$ tiende a cero y sea $R(f,\wp_n)=\sum_{\wp_n}(x_i-x_{i-1})f(t_i)$ cualquier sucesión de sumas de Riemann asociada a $(\wp_n)$.

Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n)=\int_a^b f(x)dx.$$

Como $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, tenemos $R(f,\wp_n)=\sum_{\wp_n}(x_i-x_{i-1})f(t_i)\geq 0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} R(f,\wp_n)\geq 0.$$

Es decir

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Así hemos probado el teorema.

Como corolarios inmediatos tenemos los siguientes teoremas:

### Teorema

Sean $f$ y $g$ funciones continuas en un intervalo $[a, b]$. Supongamos $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

### Demostración

Como $g(x)-f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, por el teorema anterior tenemos:

$$\int_a^b (g(x)-f(x))dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

De esta desigualdad se sigue la afirmación del teorema.

El siguiente teorema es un corolario inmediato.

### Teorema

Sea $f$ continua en un intervalo $[a, b]$, donde como siempre suponemos $a < b$. Sean también

$$M = \max_{[a,b]} f(x) \;\; \text{y} \;\; m = \min_{[a,b]} f(x).$$

Entonces

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

### Demostración

Puesto que:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para toda} \quad x \in [a,b].$$

Tenemos

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Por tanto

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Esto prueba el teorema.

El siguiente resultado es conocido como **teorema del valor medio del cálculo integral** o **teorema del valor medio para integrales.**

### Teorema

Sea $f$ continua en un intervalo $[a, b]$; entonces, existe un punto $a \leq x_0 \leq b$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a).$$

### Demostración

Del teorema anterior sabemos que si $M = \max_{[a,b]} f(x)$ y $m = \min_{[a,b]} f(x)$, entonces

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Como $f$ es continua en $[a, b]$, por el teorema del valor intermedio se sigue que existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Esto prueba el teorema.

Finalizamos esta sección con un importante teorema.

### Teorema

Sea $f$ continua en un intervalo $[a, b]$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

### Demostración

De las propiedades del valor absoluto tenemos

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \text{para toda } x \in [a,b].$$

Luego

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Por tanto

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Esto prueba el teorema.

## 1.7.2 Teorema (aditividad de la integral)

Sean $f$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $c$ un número entre $a$ y $b$, esto es $a < c < b$.

Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

A esta propiedad se le conoce como *propiedad de aditividad* o *propiedad aditiva* de la integral.

### Demostración

Sea $\wp_1^{(1)}, \wp_2^{(1)}, \wp_3^{(1)}, \ldots$ una sucesión de particiones de $[a, c]$ y $(\delta_n^{(1)})$ su sucesión de mallas, de la cual suponemos $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n^{(1)} = 0$. Sea $\wp_1^{(2)}, \wp_2^{(2)}, \wp_3^{(2)}, \ldots$ una sucesión de particiones de $[c, b]$ y $(\delta_n^{(2)})$ su sucesión de mallas, suponemos, también, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n^{(2)} = 0$.

Sea $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$, la sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que cada $\wp_n$ es la unión de las particiones $\wp_n^{(1)}$ y $\wp_n^{(2)}$. Si estas son

$$\wp_n^{(1)}: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n_1} = c$$

$$\wp_n^{(2)}: \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n_2} = b$$

la partición $\wp_n$ de $[a, b]$ consiste de $n_1 + n_2 + 1$ puntos, siendo $c$ uno de ellos,

$$\wp_n: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_1-1} < c < y_1 < \ldots < y_{n_2}{}^{-1} < y_{n_2-1} = b$$

La malla $\delta_n$ de $\wp_n$ es la mayor de $\delta_n^{(1)}$ y $\delta_n^{(2)}$; así,

$$\delta_n = \text{máx}(\delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)}).$$

Entonces, tenemos $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Sea $R^{(1)}(f, \wp_n^{(1)}) = \sum_{\wp_n^{(1)}} (x_i - x_{i-1})f(t_i)$ una sucesión de sumas de Riemann para $f$ en el intervalo $[a, c]$, asociada a la sucesión de particiones $\wp_1^{(1)}, \wp_2^{(1)}, \wp_3^{(1)}\ldots$. Sea $R^{(2)}(f, \wp_n^{(2)}) = \sum_{\wp_n^{(2)}} (y_i - y_{i-1})$ $f(m_i)$ una sucesión de sumas de Riemann para $f$ en el intervalo $[c, b]$, asociada a la sucesión de particiones $\wp_1^{(2)}, \wp_2^{(2)}, \wp_3^{(2)}, \ldots$.

Sea $R(f, \wp_n)$ la sucesión de sumas de Riemann para $f$ en el intervalo $[a, b]$, asociada a la sucesión de particiones $\wp_1, \wp_2, \wp_3, \ldots$, definida como

$$\begin{aligned} R(f, \wp_n) &= R^{(1)}(f, \wp_n^{(1)}) + R^{(2)}(f, \wp_n^{(2)}) \\ &= \sum_{\wp_n^{(1)}}(x_i - x_{i-1})f(t_i) + \sum_{\wp_n^{(2)}}(y_i - y_{i-1})f(u_i). \end{aligned}$$

Dado que el cálculo de las integrales no depende de la sucesión de sumas de Riemann que se elija, con tal de que la sucesión de mallas tienda a cero, se sigue de esta relación que

$$\lim_{n\to\infty} R(f, \wp_n) = \lim_{n\to\infty} R^{(1)}(f, \wp_n^{(1)}) + \lim_{n\to\infty} R^{(2)}(f, \wp_n^{(2)}).$$

Es decir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Esto prueba el teorema.

Del teorema anterior, deducimos la relación particular

$$\int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx.$$

### 1.7.3 Aditividad generalizada

En la fórmula anterior, $c$ es un punto intermedio entre $a$ y $b$. En el siguiente capítulo será muy conveniente que la relación anterior tenga sentido y que esta sea válida aun en el caso de que $c$ no satisfaga la desigualdad $a < c < b$.

Hemos definido la integral de una función $f$ continua, de tal suerte que en la expresión

$$\int_a^b f(x)dx$$

queda tácitamente entendido que $a < b$. Ahora, permitiremos que $a$ sea mayor que $b$, la definición que haremos al respecto responde al deseo de generalizar algunos resultados importantes del cálculo, en particular, el teorema fundamental del cálculo.

#### Definición

Sean $a < b$ y $f$ una función continua en un intervalo $[a, b]$. Definimos la integral $\int_b^a f(x)dx$ como

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

También, definimos

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

A partir de estas definiciones y de la propiedad de aditividad, se deduce el siguiente teorema.

### Teorema

Sea $f$ una función continua en un intervalo abierto $I$. Sean $a$, $b$ y $c$ puntos cualesquiera de $I$, los cuales no necesariamente cumplen $a < c < b$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

### Demostración

Si dos de los tres puntos $a$, $b$ y $c$ coinciden, la igualdad a probar se cumple trivialmente. Si los tres puntos $a$, $b$ y $c$ están en posiciones $a < c < b$, entonces la igualdad será precisamente la aditividad estudiada en el teorema anterior. Para probar esta relación, debemos cubrir las cinco posibilidades restantes de las seis posiciones relativas que guardan los puntos $a$, $b$ y $c$.

$$\begin{array}{c} c < a < b \\ a < c < b \\ a < b < c \\ c < b < a \\ b < c < a \\ b < a < c \end{array}$$

Estudiemos un caso, los otros se pueden tratar de manera similar. Supongamos por ejemplo $a < b < c$, entonces sabemos por ese mismo teorema, que se cumple

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Si despejamos $\int_a^b f(x)dx$, obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

Pero, por definición

$$\int_c^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx,$$

así que podemos escribir

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Se deja como ejercicio para el lector, la verificación de los otros casos. Esto prueba el teorema.

# 1.8 Integral de una función continua por piezas

Ya hemos establecido el concepto de integral de una función $f$ sobre un intervalo $[a, b]$, para lo cual requerimos que $f$ fuese continua en el intervalo $[a, b]$. A continuación, extenderemos el concepto de integral a funciones que no necesariamente son continuas en el intervalo. Así, ahora permitiremos que la función tenga puntos de discontinuidad, pero, aun en este caso, pediremos un buen comportamiento de la función en esos puntos. Esto se establece en la siguiente definición.

### Definición

Una función $f$ es **continua por piezas** (o continua por tramos o por pedazos) en el intervalo $[a, b]$, si existe un número finito de puntos $a = c_0 < c_1 < c_2 <\ldots< c_{n-1} < b = c_n$, tales que

*a*) $f$ es continua en cada intervalo abierto $(c_{i-1}, c_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

y

*b*) existen los límites laterales

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x),\quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x),\quad \lim_{\substack{x\to c_i\\ x<c_i}} f(x) \text{ y } \lim_{\substack{x\to c_i\\ x>c_i}} f(x) \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

### Ejemplo 7

La función $f:[0, 3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{si } x \in (1,2) \\ -x + 5 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

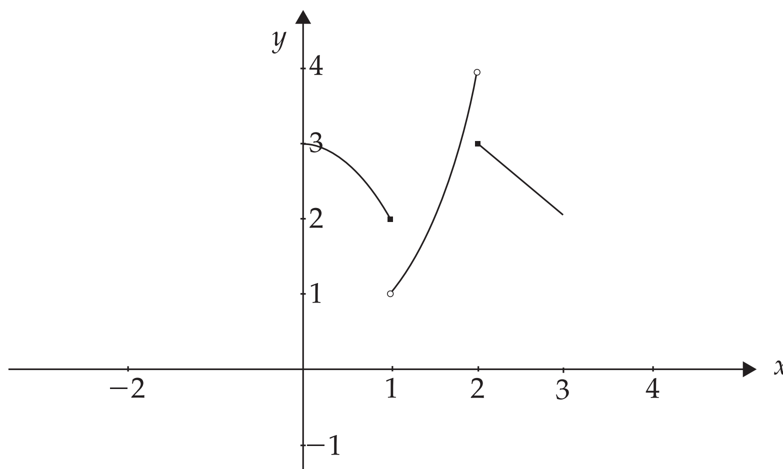
es continua por piezas, pues es continua en $[0, 3]$, excepto en $x = 1$ y $x = 2$, pero en estos puntos existen todos los límites laterales, de hecho

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2 = f(1),$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 4,$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 3 = f(2)$$

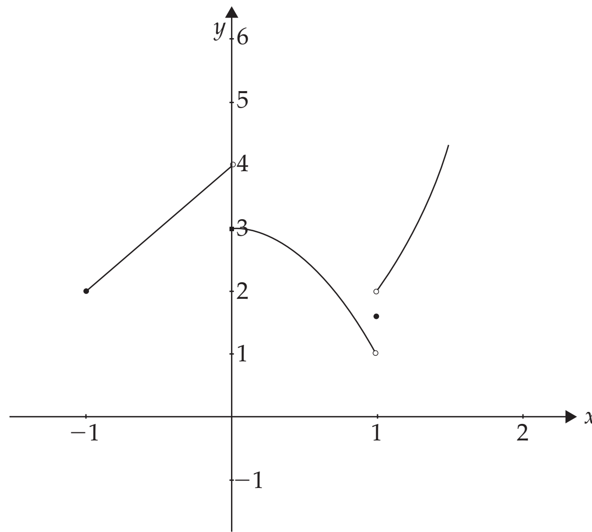


### Ejemplo 8

La función $f:[-1, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \in [-1,0) \\ -2x^2 + 3 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \frac{3}{2} \\ x^3 + 1 & \text{si } x \in (1, \frac{3}{2}] \end{cases}$$

es continua por piezas, pues es continua en el intervalo $[-1, \frac{3}{2}]$, excepto en los puntos $x = 0$ y $x = 1$, pero en estos existen todos los límites laterales.



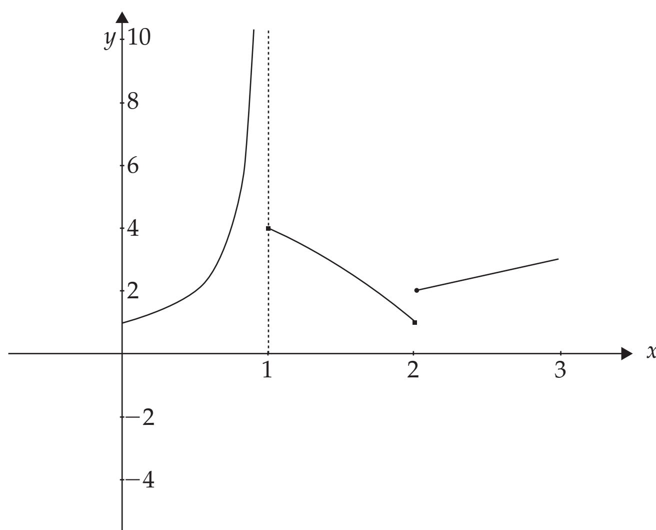

### Ejemplo 9

La función $f:[0, 3] \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \in [0,1) \\ -x^2 + 5 & \text{si } x \in [1,2] \\ x & \text{si } x \in (2,3] \end{cases}$$

no es continua por piezas, pues aunque lo es en todo el intervalo, con excepción de los puntos $x = 1$ y $x = 2$ (como en los ejemplos anteriores), en este caso no existe el límite lateral derecho en el punto $x = 1$, de hecho tenemos

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} 1\left(-\frac{1}{x-1}\right) = +\infty.$$




En la definición de continuidad por piezas de una función $f$, la existencia de los límites laterales en los puntos de discontinuidad $c_i$, da la posibilidad de "extender temporalmente" la función definida en el intervalo abierto $(c_i, c_{i+1})$ a una continua en el intervalo cerrado $[c_i, c_{i+1}]$; por supuesto, la función $f$: $[c_i, c_{i+1}]\to\mathbb{R}$ no necesariamente es continua en los extremos $c_i$ y $c_{i+1}$, pues no necesariamente se cumplen las igualdades

$$\lim_{\substack{x\to c_i\\ x<c_i}} f(x) = f(c_i) \text{ y } \lim_{\substack{x\to c_{i+1}\\ x<c_{i+1}}} f(x) = f(c_{i+1})$$

condiciones que se requieren para la continuidad en $c_i$ y $c_{i+1}$, respectivamente. A continuación explicamos el sentido de temporalidad que le damos a la redefinición de $f$ en $[c_i, c_{i+1}]$. Esto nos posibilitará definir la integral de $f$ en el intervalo $[a, b]$.

Sea $f$ una función continua por piezas, sean a= $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b = c_{n+1}$ como en la definición anterior. Si bien, la función restringida en cada uno de los intervalos $[c_i, c_{i+1}]$ no necesariamente es continua, dado que existen los límites

$$\lim_{\substack{x\to c_i\\ x<c_i}} f(x) \text{ y } \lim_{\substack{x\to c_i\\ x>c_i}} (fx)$$

podemos definir para cada $i = 1, 2,\ldots, n$, una función $g_i$ cuyo dominio sea solo el intervalo $[c_i, c_{i+1}]$, de tal manera que sea continua en $[c_i, c_{i+1}]$ y que coincida con $f$ en el abierto $(c_i, c_{i+1})$. Por supuesto, la función $g_i$: $[c_i, c_{i+1}] \to\mathbb{R}$ tiene que estar dada por

$$g_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (c_i, c_{i+1}) \\ \lim\limits_{\substack{x\to c_i\\ x>c_i}} f(x) & \text{si } x = c_i \\ \lim\limits_{\substack{x\to c_{i+1}\\ x<c_{i+1}}} f(x) & \text{si } x = c_{i+1} \end{cases}$$

Esta función $g$ es contiua en el intervalo cerrado $[c_i, c_{i+1}]$ y coincide con $f$ en el abierto $(c_i, c_{i+1})$. Dado que existe la integral $\int_{c_i}^{c_{i+1}} g_i(x)dx$ , definimos la integral de $f$ en $[c_i, c_{i+1}]$, como el valor de esta, esto es

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx = \int_{c_i}^{c_{i+1}} g_i(x)dx$$

Debido a que tenemos definida la integral de $f$ en cada uno de los intervalos en $[c_i, c_{i+1}]$, definimos la integral de $f$ en el intervalo $[a, b]$ como sigue

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx + \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

Esta definición de integral tiene las mismas propiedades de linealidad y aditividad que la integral de funciones continuas. Los siguientes teoremas son fáciles de probar

### Teorema

Sean $f$ y $g$ funciones continuas por piezas en un intervalo $[a, b]$ y $k$ una constante. Entonces

*a*) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

*b*) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

### Teorema

Sea $f$ una función continua por piezas en un intervalo $[a, b]$. Si $a < c < b$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

La propiedad de aditividad generalizada también es válida para la integral de funciones continuas por piezas, para ello se requiere hacer las definiciones correspondientes.

### Definición

Sea $a < b$ y $f$ una función continua por piezas en un intervalo $[a, b]$. Definimos la integral $\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ como

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

También definimos

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

A partir de estas definiciones y de la propiedad de aditividad para funciones continuas por piezas, se deduce el siguiente teorema.

### Teorema

Sea $f$ una función tal que es continua por piezas en cada subintervalo cerrado $[\alpha, \beta]$ contenido en un intervalo abierto $I$. Sean $a$, $b$ y $c$ puntos cualesquiera de $I$, los cuales no necesariamente cumplen $a < c < b$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

## Ejemplo 10

Dado que la función $f:[0,3] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{si } x \in (1,2) \\ -x + 5 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

es continua por piezas, podemos calcular su integral. Por definición, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_0^1 (-x^2 + 3)dx + \int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 (-x + 5)dx. \end{aligned}$$

Por otra parte,

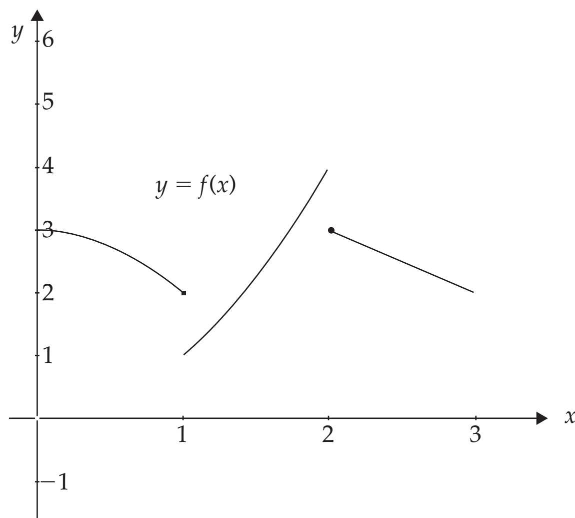
$$\int_0^1 (-x^2 + 3)dx = -\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 3dx = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3}$$

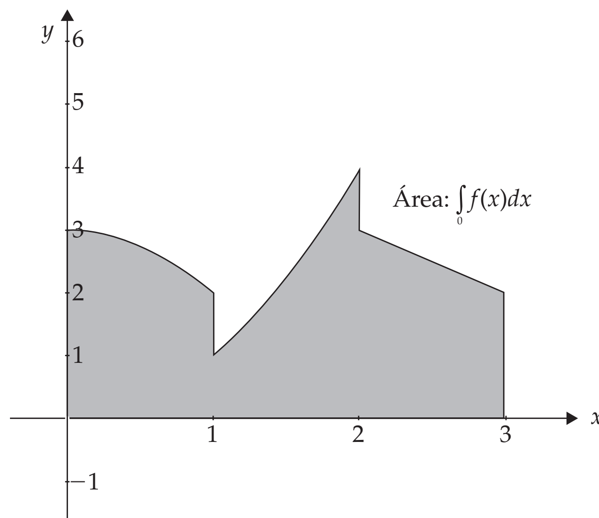
$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}\left(2^3 - 1\right) = \frac{7}{3}$$

$$\int_2^3 (-x + 5)dx = -\int_2^3 xdx + \int_2^3 5dx = -\frac{1}{2}\left(3^2 - 2^2\right) + 5\left(3 - 2\right) = \frac{5}{2}.$$

De esta forma,

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} + \frac{5}{2} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}.$$



### Ejemplo 11

Calculemos la integral de la función $f:[-1, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \in [-1, \\ -2x^2 + 3 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \frac{3}{2} \\ x^3 + 1 & \text{si } x \in (1, \frac{3}{2} \end{cases}$$

la cual es continua por piezas.

Por definición, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{3}{2}} f(x)dx &= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{0} (2x + 4)dx + \int_{0}^{1} (-2x^2 + 3)dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (x^3 + 1)dx. \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} (2x + 4)dx &= \int_{-1}^{0} 2xdx + \int_{-1}^{0} 4dx \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2}(-1)^2\right) + 4\big(0 - (-1)\big) \\ &= -1 + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

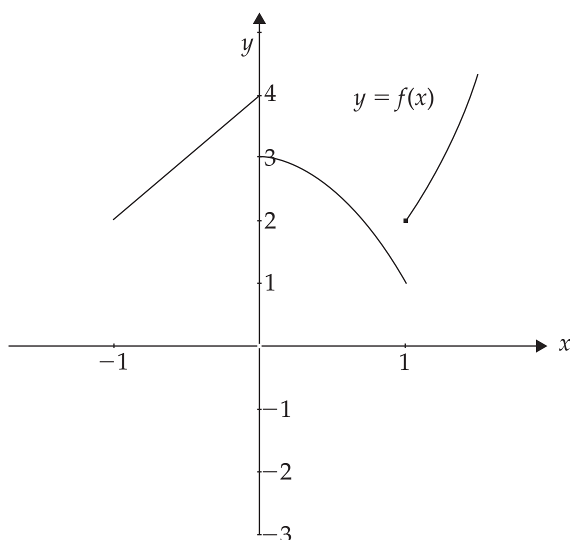
$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} (-2x^2 + 3)dx &= \int_{0}^{1} (-2x^2)dx + \int_{0}^{1} 3dx \\ &= -2\left(\frac{1}{3}\right) + 3 \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

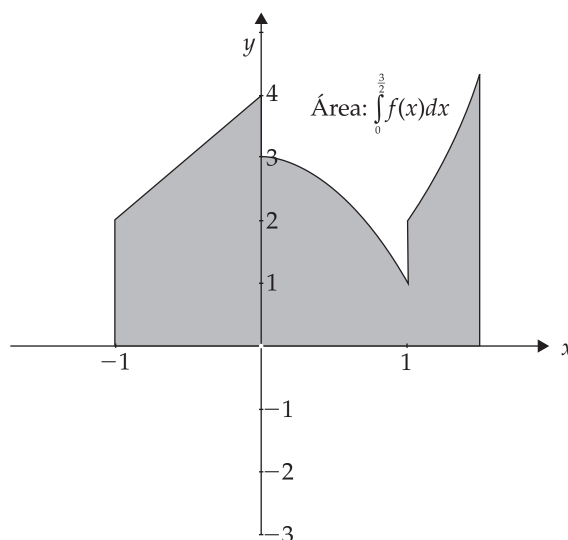
$$\begin{aligned} \int_{1}^{\frac{3}{2}} (x^3 + 1)dx &= \int_{1}^{\frac{3}{2}} x^3dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} 1dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1\right) + \left(\frac{3}{2} - 1\right) \\ &= \frac{97}{64} \end{aligned}$$

de donde, finalmente, obtenemos

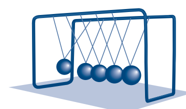
$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (2x + 4)dx + \int_{0}^{1} (-2x^2 + 3)dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (x^3 + 1)dx$$
$$= 3 + \frac{7}{3} + \frac{97}{64}$$
$$= \frac{1\,315}{192}.$$

En el apéndice presentamos una definición más general de la integral de una función. La generalidad consiste en que se consideran funciones no necesariamente continuas por piezas de modo que la definición se aplica a una clase más amplia de funciones. En la nueva definición solo se pide que las funciones sean acotadas en el intervalo de integración, por lo que podrán tener una infinidad de puntos de discontinuidad, lo que hasta ahora no es posible. Esta nueva definición de integral se conoce como **Integral de Riemann.**




## 1.9 Problemas y ejercicios



1. Calcule la suma de Riemann $R(f, \wp_n) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (x_{k+1} - x_k)f(\xi_k)$ para la función $f(x) = x + 1$ en el intervalo $[-1, 4]$, correspondiente a la partición que resulta de dividir este intervalo en $n$ partes iguales. Para cada $k$, tome como $\xi_k$ el punto medio del intervalo $[x_k, x_{k+1}]$.
2. Calcule la siguiente suma de Riemann $R(f, \wp_n) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (x_{k+1} - x_k)f(\xi_k)$ para la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$, correspondiente a la partición que resulta de dividir el intervalo en $n$ partes iguales. Para cada $k$, tome $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, tal que la función tiene un mínimo en $[x_k, x_{k+1}]$.
3. Sea $0 < a < 1$. Halle el valor de la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le a \\ a\dfrac{1-x}{1-a} & \text{si} \quad a \le x \le 1 \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de $f$.

**4.** Usando sumas de Riemann, calcule la integral $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

**5.** Usando sumas de Riemann, calcule la integral $\int_{a}^{b} \cos x dx$.

**6.** Usando sumas de Riemann, calcule la integral $\int_{0}^{2} 2^x dx$.

**7.** Utilizando la fórmula obtenida para $\int_{a}^{b} x^k dx$, calcule las siguientes integrales:

*a)* $\int_a^{2a} \frac{b^2x^2}{a^2}dx$

*b)* $\int_0^m \frac{x^2 + m^2}{m^2}dx$

*c)* $\int_a^b (x - a)(x - b)dx$

*d)* $\int_{-a}^0 \frac{(a + x)^2}{a}dx$

*e)* $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\right)dx$

*f)* $\int_0^1 x^2(1 - x)^2 dx$

**8.** Sea $f$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x + 5 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Calcule la integral $\int_0^5 f(x)dx$.

**9.** Calcule la integral $\int_{-1}^3 |x| dx$.

**10.** Calcule la integral $\int_{-2}^3 \frac{x + |x|}{2}dx$.

**11.** Sea $f(x) = \frac{|x|}{x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Calcule la integral $\int_{-3}^2 f(x)dx$.

**12.** Sea $f(x) = \frac{x + |x|}{2x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Calcule la integral $\int_{-1}^t f(x)dx$, donde $t \geq -1$.

**13.** Calcule la integral $\int_{-2}^3 [x]dx$, donde como siempre $[x]$ representa la parte entera de $x$.

**14.** Calcule la integral $\int_0^t (x)dx$, donde $(x)$ representa la parte decimal de $x$ y $t \geq 0$. Recuerde la relación $(x) = x - [x]$.

**15.** Calcule la integral $\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} x]dx$.

**16.** Calcule la integral $\int_0^{\log 2} [e^x]dx$.

**17.** Calcule la integral $\int_{\log 3}^{\log 4} [e^x]dx$.

**18.** Calcule la integral $\int_0^{10} x\cos^8\left[x - [x]\right]dx$ (el cálculo es muy simple).

**19.** Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

**Ayuda:** considere la integral $\int_a^b x dx$ en un intervalo apropiado.

**20.** Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2^m n}\right)$$

donde $m$ es un entero positivo fijo.

**21.** Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

**22.** Recordemos que una función $f$ es impar si $f(-x) = -f(x)$ y es par si $f(-x) = f(x)$. Pruebe que si $f$ es impar, entonces

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

**23.** Sea $f$ una función par. Muestre que

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f(x)dx.$$

**24.** Calcule las siguientes integrales:

*a)* $\int_{-1}^1 x^{101}\operatorname{sen}^2 x dx$

*b*) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 3x)\sqrt{1 + x^8}\,dx$

*c*) $\int_{-3}^{3} \frac{x}{e^{x^2} + x^2}\,dx$

**25.** Calcule la integral $\int_{-2}^{2} x^2 |x|\, dx$ .

**26.** Calcule la integral $\int_{-2}^{2} (5x^4 + \operatorname{sen}^5 4x)dx$ .

**27.** Calcule la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^7|x| - \cos x + |x| \operatorname{sen}^7 x)dx .$$

**28.** Sean $f$ y $g$ continuas en un intervalo $[a, b]$.

*a*) Pruebe la igualdad

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))dy\right]dx =$$
$$(b - a)\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$$

*b*) Pruebe que si $f$ y $g$ son crecientes, entonces

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right) \le (b - a)\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

*c*) Pruebe que la desigualdad anterior se invierte si $f$ es creciente y $g$ decreciente.

**29.** Para cada uno de los siguientes incisos, diga cuál de las dos integrales es mayor

*a*) $\int_0^1 x^2 dx$ y $\int_0^1 x^3 dx$

*b*) $\int_1^2 x^2 dx$ y $\int_1^2 x^3 dx$

*c*) $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}dx$ y $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^4}dx$

*d*) $\int_1^2 \frac{1}{1 + x^2}dx$ y $\int_1^2 \frac{1}{1 + x^4}dx$

*e*) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ y $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$

*f*) $\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^n}dx$ y $\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^m}dx$,

($n$ y $m$ enteros positivos con $n > m$).

**30.** Pruebe la desigualdad

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}\,dx \le \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

**31.** Pruebe la desigualdad

$$\frac{2}{3} \le \int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**32.** Pruebe la desigualdad

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1 + x}}dx \le \frac{1}{10}.$$

**33.** Pruebe la desigualdad

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}dx \le \frac{1}{2}.$$

**34.** Pruebe la desigualdad

$$\frac{1}{1 + a^6}\left(a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5\right) \le \int_0^a \frac{dx}{1 + x^2}$$
$$\le a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$$

para toda $a > 0$.

**Ayuda:** es fácil encontrar un polinomio $p(x)$, tal que $\frac{1}{1 + x^2} = \frac{p(x)}{1 + x^6}$.

## Desigualdad de Cauchy-Schwarz

**35.** Pruebe que para cualesquiera funciones continuas $f$ y $g$, se tiene

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

**Ayuda:** sea $\alpha^2 = \int_a^b f^2(x)dx \neq 0$ y $\beta^2 = \int_a^b g^2(x)dx \neq 0$, pruebe que

$$\left|\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{\alpha\beta}dx\right| \le 1$$

Para tal efecto, use la desigualdad $|AB| \le \frac{A^2 + B^2}{2}$, la cual vale para cualesquiera reales $A$ y $B$.

**Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)**



Matemático alemán cuyos trabajos se centraron en el análisis matemático, la geometría diferencial, las transformaciones conformes y en los problemas de cálculo variacional, en particular sobre superficies de área mínima. Precisamente en un trabajo sobre este tema, publicado en 1885, Schwarz presenta la famosa desigualdad que lleva su nombre y por la que, sin duda, es más conocido. En ocasiones, esta desigualdad también lleva el nombre del matemático ruso Bunyakovsky. Schwarz fue influido profundamente por Weierstrass, quien, a su vez, influyó con fuerza en otros matemáticos. Los historiadores describen a Schwarz como ingenuo, dramático, tosco e inseguro. Tendía a centrarse en problemas concretos, con frecuencia acudiendo a técnicas extremadamente brillantes.

**36.** Sean $f$ y $g$ continuas en un intervalo $[a, b]$.

*a*) Pruebe que

$$\frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y)\end{vmatrix}dy\right]dx =$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

*b*) Obtenga otra prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

**37.** Pruebe la desigualdad

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\,dx \leq \frac{\sqrt{33}}{12} \approx 0.4787135538$$

**38.** Pruebe que si $f:[0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx$$

**39.** Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe que

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

**40.** Pruebe que

$$\int_0^{10} \frac{xdx}{x^3 + 16} < \frac{5}{6}$$

**41.** Si $f$ es una función continua creciente o decreciente, pruebe que $\int_a^b f(x)dx$ es un número que está entre $(b - a)f(a)$ y $(b - a)f(b)$.

**42.** Partiendo de consideraciones geométricas, demuestre que si $f$ es creciente y cóncava hacia arriba en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$(b - a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

**43.** Con argumentos geométricos demuestre que si $f$ es creciente y cóncava hacia abajo en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$(b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} < \int_a^b f(x)dx < (b - a)f(b)$$

**44.** Usando el problema anterior, pruebe la desigualdad

$$0.8 \leq \int_2^3 \frac{x^2dx}{1 + x^2} \leq 0.85$$

**45.** Halle una desigualdad como la del ejercicio anterior para la integral $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$.

**46.** Sea $f$ una función derivable y creciente en un intervalo $[a, b]$. Sea $f^{-1}$ la inversa de $f$. Con argumentos geométricos, deduzca la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a)$$

**47.** Sean $a$ y $b$ números positivos y sean $p > 1$ y $q > 1$, tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(por ejemplo $p = q = 2$). Pruebe que

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{p}$$

**Ayuda:** use el resultado del problema anterior. Muestre primero que las funciones $f(x) = x^{p-1}$ y $g(x) = x^{q-1}$ son mutuamente inversas. Después, considere las integrales $\int_0^a x^{p-1}dx$ y $\int_0^b x^{q-1}dx$.

**48.** Otra prueba de la desigualdad del problema anterior se obtiene de la siguiente manera:

Primero, pruebe que si $\alpha$ es un real con $0 < \alpha < 1$, entonces la función $f(x) = x^\alpha + \alpha x + \alpha$ alcanza un valor máximo en $x = 1$. Tome el caso particular $\alpha = \frac{1}{p}$ y haga $x = \frac{a^p}{b^q}$.

## Desigualdad de Hölder

**49.** Esta desigualdad es una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sean $f$ y $g$ continuas en un intervalo $[a, b]$ y sean dos reales $p > 1$ y $q > 1$, tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Pruebe que

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Cuando $p = q = 2$ se obtiene de la desigualdad de Cauchy- Schwarz. Otro ejemplo es

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^4(x)dx\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_a^b g^{\frac{4}{3}}(x)dx\right)^{\frac{3}{4}}$$

## Teorema del valor medio para integrales

**50.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, pruebe que existe $a \leq \xi \leq b$, tal que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$$

o sea

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} = f(\xi)$$

**Ayuda:** si $m = \text{mín } f(x)$ y $M = \text{máx } f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$m \leq f(x) \leq M$$

para toda $a \leq x \leq b$. Por tanto,

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Ahora, use el teorema del valor intermedio

para funciones continuas.

## Teorema del valor medio generalizado para integrales

**51.** Sean $f$ y $g$ funciones continuas $[a, b] \to \mathbb{R}$, tales que $g(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$. Pruebe que existe $a \leq \xi \leq b$, tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

**52.** Sea $f$ una función continua $[a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Pruebe que $f(x_0) = 0$ para algún punto $x_0 \in [a, b]$.

# CAPÍTULO 2

# TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO



# 2.1 Introducción

En principio, para calcular la integral de una función continua $f$ en un intervalo $[a, b]$, debemos recurrir a la definición de integral que consiste en calcular el límite de una sucesión de sumas de Riemann. En la práctica, y en el mejor de los casos, este proceso puede resultar difícil y demasiado laborioso; hecho que, con seguridad, se percibió en los ejemplos del capítulo anterior. Incluso, no sería exagerado afirmar que, procediendo de esta manera, podemos encontrarnos con casos en los que el cálculo de la integral sea una tarea casi imposible.

Solo si estamos conscientes de las complicaciones que pueden presentarse en el cálculo de integrales, es posible apreciar el importantísimo descubrimiento acerca de la relación que existe entre la derivada y la integral; misma que se refiere, en algún sentido, a que la derivada y la integral son conceptos mutuamente inversos. En términos geométricos, podemos decir que el problema de la tangente, que consiste en determinar la tangente a una curva en un punto dado, y el problema de hallar el área bajo una curva, son problemas mutuamente inversos. A reserva de precisar cuál es esta relación entre derivada e integral, con toda la transparencia que se merece, podemos adelantar que una de sus consecuencias es que la derivada nos permite calcular las integrales de manera asombrosamente fácil. Este cálculo requiere del proceso inverso de la derivación, es decir, de hallar lo que llamamos una antiderivada. De esta forma, podemos decir que el problema de calcular una integral se transforma en un problema de antiderivación.

La relación entre la derivada y la integral o, si lo prefiere, entre los procesos de derivación e integración, se manifestó en problemas particulares planteados y resueltos por matemáticos predecesores de Newton y Leibniz. Mucha de la evidencia de esta relación la observaron matemáticos y científicos antes de ellos. Por ejemplo, Torricelli notó, en casos particulares, que el problema de la razón de cambio era esencialmente el inverso del cálculo de áreas; lo cual, a su vez, se relacionaba con el trabajo de Galileo sobre el hecho de que el área bajo la gráfica velocidad-tiempo daba la distancia recorrida. Así que, como la razón de cambio de la distancia era la velocidad, esta función debía ser la derivada de la función área.

En realidad, desde tiempo antes ya se había acumulado una gran cantidad de conocimiento acerca de la derivada, la integral y su relación de reciprocidad, sin embargo, su importancia solo fue reconocida por Newton y Leibniz; este fue el verdadero mérito de ambos científicos. Aquí cabe la reflexión que alguna vez hacía un matemático: "es bueno descubrir algo importante, pero es mejor descubrir que es importante". Así, lo que hicieron Newton y Leibniz fue descubrir la importancia de la relación de reciprocidad entre la derivada y la integral.

**Evangelista Torricelli (1608-1647)**



Matemático y físico italiano, nació en Faenza y estudió en el *Collegio di Sapienza*, en Roma. Fue el inventor del barómetro, aspecto por el que se le conoce principalmente. Ayudante de Galileo de 1641 a 1642, a la muerte de este, en 1642, Torricelli lo sucedió como profesor de filosofía y matemáticas en la Academia Florentina. Torricelli descubrió y determinó el valor de la presión atmosférica y con base en sus cálculos, en 1643 inventó el barómetro. Escribió diversos tratados y obras, entre las que destacan el *Trattato del moto* (Tratado sobre el movimiento) y *Opera geometrica* (Obra geométrica). El torr, unidad de medida utilizada en física para medir la presión barométrica cuando se trabaja en condiciones cercanas al vacío, se denomina así en su honor.

Por otra parte, en casos particulares, también muestra la relación entre la derivada y la integral, que constituyeron los indicios del teorema fundamental del cálculo.

# 2.2 Integral como función del límite superior: integral indefinida

Una de las relaciones de reciprocidad entre la derivada y la integral, o entre la razón de cambio y el área bajo una curva sobre un intervalo, se obtiene cuando se considera al área como función de uno de los extremos del intervalo. A continuación estudiaremos la naturaleza de esta función.

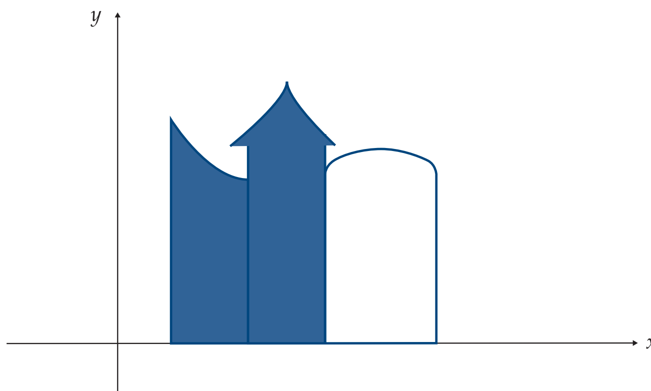
### Teorema

Sea $I$ un intervalo y $f$ una función continua o continua por piezas en $I$. Sea $a \in I$ y $F : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(u)du.$$

Entonces, $F$ es continua en cada punto del intervalo $I$.

Antes de proceder con la demostración de este teorema, observemos que aun cuando la función $f$ puede ser discontinua en uno o varios puntos, la función integral $F$ siempre resulta continua en todos los puntos de $[a, b]$ donde está definida.




### Demostración del teorema

Sea $x_0$ un punto de $I$. Para probar la continuidad de $F$ en $x_0$, probaremos que

$$\lim_{x \to x_0} \left[ F(x) - F(x_0) \right] = 0 \cdot$$

Por las propiedades de la integral, tenemos

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_a^x f(u)du - \int_a^{x_0} f(u)du \\ &= \int_a^{x_0} f(u)du + \int_{x_0}^{x} f(u)du - \int_a^{x_0} f(u)du \\ &= \int_{x_0}^{x} f(u)du \end{aligned}$$

Esta igualdad es válida independientemente de la posición relativa entre $x$ y $x_0$, es decir, vale para $x \geq x_0$ o $x < x_0$.

Como $f$ es continua o continua por piezas en $I$, en particular es acotada en el intervalo $I$, así que existe $M > 0$, tal que

$$-M \leq f(x) \leq M$$

para toda $x \in I$. Por tanto, para $x \geq x_0$, tenemos

$$-M(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(u)du \leq M(x - x_0).$$

Si $x < x_0$, tenemos

$$-M(x_0 - x) \leq \int_{x}^{x_0} f(u)du \leq M(x_0 - x).$$

Esta desigualdad también se escribe

$$-M(x_0 - x) \leq -\int_{x_0}^{x} f(u)du \leq M(x - x_0).$$

Al multiplicar por $-1$ cada miembro de la doble desigualdad obtenemos

$$-M(x_0 - x) \leq -\int_{x_0}^{x} f(u)du \leq M(x_0 - x)$$

o sea

$$-M\left|x - x_0\right| \leq \int_{x_0}^{x} f(u)du \leq M\left|x - x_0\right|.$$

Así que para toda $x \in I$ tenemos

$$-M\left|x - x_0\right| \leq \int_{x_0}^{x} f(u)du \leq M\left|x - x_0\right|$$

Es decir,

$$0 \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(u)du\right| \leq M\left|x - x_0\right|.$$

De aquí, inmediatamente se sigue que

$$\lim_{x \to x_0}\left|\int_{x_0}^{x} f(u)du\right| = 0.$$

Recordemos que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(u)du$$

por consiguiente,

$$\lim_{x \to x_0}\left|F(x) - F(x_0)\right| = \lim_{x \to x_0}\left|\int_{x_0}^{x} f(u)du\right| = 0.$$

Esto prueba el teorema.

Funciones definidas mediante una integral, como la del teorema anterior, reciben un nombre especial, como se establece en la siguiente definición.

### Definición

Sea $I$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua o continua por piezas y sea $a \in I$. La función $F_a : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)du$$

$F_a$ recibe el nombre de **integral indefinida** de $f$.

Para $\alpha \in I$, $F_\alpha$ es una integral indefinida, sin embargo, a partir de las propiedades de la integral, podemos escribir cualquier integral indefinida en términos de una integral indefinida particular.

Por ejemplo, sea $a \in I$ *fija* y sea

$$F_a(x) = \int_a^x f(u)du.$$

De la propiedad aditiva de la integral, tenemos para cada $\alpha \in I$:

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \int_a^x f(u)du \\ &= \int_a^\alpha f(u)du + \int_\alpha^x f(u)du \\ &= \int_a^\alpha f(u)du + F_\alpha(x). \end{aligned}$$

Así que

$$F_\alpha(x) = F_a(x) - \int_a^\alpha f(u)du = F_a(x) + \int_\alpha^a f(u)\, du.$$

Dado que para $\alpha \in I$, la integral $\int_\alpha^a f(u)du$ es una constante, entonces para cada integral indefinida $F_\alpha$ de $f$, hay una constante $c$, tal que

$$F_\alpha(x) = F_a(x) + c.$$

para toda $x \in I$. Dicho de otra manera, todas las integrales indefinidas de $f$ las podemos escribir en la forma

$$\int_a^x f(u)du + c.$$

## 2.3 Primera parte del teorema fundamental

La derivada y la integral son conceptos inversos uno del otro; ahora, explicaremos lo que significa este hecho. Comenzamos con lo que llamaremos la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

### Teorema

Sea $I$ un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua y $a \in I$. Entonces, la integral indefinida $F\colon I \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

es derivable en cada punto $x \in I$; además, se tiene $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in I$.

### Demostración

Elijamos un punto $x_0 \in I$ y mostremos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Para cada $x \in I$, con $x \neq x_0$, denotemos por $J$ el intervalo cerrado con extremos $x$ y $x_0$, este puede ser de la forma $J = [x_0, x]$ o bien $J = [x, x_0]$. Sea $m$ el valor mínimo de $f$ en el intervalo $J$ y sea $M$ su valor máximo en este mismo intervalo, es decir

$$m = \text{mín}\,\{f(t) \mid t \in J\} \text{ y } M = \text{máx}\,\{f(t) \mid t \in J\}.$$

Entonces, tenemos

$$m \leq f(t) \leq M$$

para toda $t \in J$; por tanto, para $x > x_0$:

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(u)du \leq M(x - x_0).$$

Pero

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(u)du$$

así que para $x > x_0$ tenemos

$$m(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) < M(x - x_0)$$

o sea

$$m \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq M.$$

Por otra parte, si $x < x_0$ tenemos

$$m(x_0 - x) \leq \int_{x}^{x_0} f(u)du \leq M(x_0 - x)$$

y

$$F(x_0) - F(x) = \int_{x}^{x_0} f(u)du.$$

Así que para $x < x_0$ se cumple

$$m(x_0 - x) \leq F(x_0) - F(x) \leq M(x_0 - x)$$

$$m \leq \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} \leq M.$$

Esta última desigualdad también se escribe

$$m \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq M.$$

Así que en cualquiera de los casos $x > x_0$ o $x < x_0$ se cumple la desigualdad anterior.

Como uno de los extremos de $J$ es el punto variable $x$, así $m$ y $M$ también varían según varíe $x$. Para recordar este hecho conviene escribir

$$m = m(x) \text{ y } M = M(x).$$

Como $f$ es continua en $x_0$ tenemos

$$\lim_{x \to x_0} m(x) = f(x_0) \text{ y } \lim_{x \to x_0} M(x) = f(x_0)$$

por tanto, al tomar estos límites en los extremos de la desigualdad

$$m(x) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq M(x)$$

obtenemos

$$\lim_{x \to x_0} m(x) \leq \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0} M(x)$$

$$f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0).$$

De donde, finalmente, se obtiene

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0).$$

Que es lo que deseábamos probar.

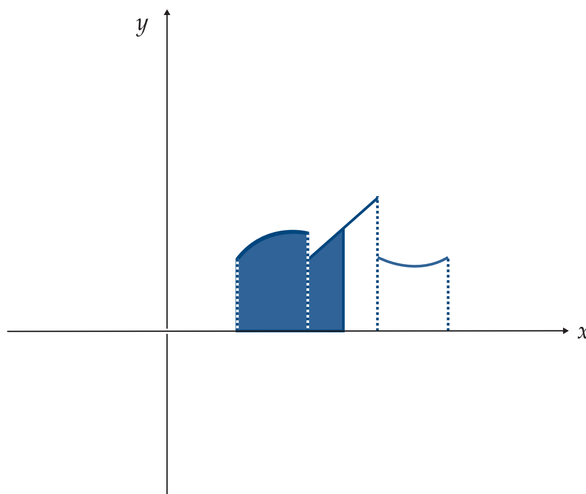
Haciendo algunas modificaciones a la demostración anterior, se puede probar el siguiente teorema que generaliza al anterior.

### Teorema (primera parte del teorema fundamental)

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua o continua por piezas, entonces la integral indefinida $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

es derivable en cada punto donde $f$ sea continua; además, en estos puntos de continuidad de $f$, se tiene $F'(x) = f(x)$.




## 2.4 Funciones primitivas o antiderivadas

Las funciones $F$ cuya derivada es igual a una función $f$, reciben el nombre especial que establecemos en la siguiente definición.

### Definición

Una función $F : A \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de $f : A \to \mathbb{R}$ si $F$ es derivable en cada punto de su dominio $A$ y además $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in A$. En este caso, también diremos que $F$ es una **antiderivada** de $f$.

En esta definición, el conjunto $A$ no necesariamente es un intervalo, este caso especial merece una reflexión que haremos más adelante.

De la definición anterior y de la primera parte del teorema fundamental del cálculo se desprenden los siguientes enunciados particulares.

### Teorema

Toda función continua en un intervalo tiene primitiva.

Más específicamente:

### Teorema

Toda integral indefinida $F(x) = \int_\alpha^x f(u)du$ de una función $f$ continua en un intervalo, es una primitiva de $f$.

Este es un hecho importante que utilizaremos más adelante.

Si $F$ y $G$ son dos primitivas de una misma función $f$ en un intervalo $I$, entonces la función diferencia $G - F$ tiene derivada cero en ese intervalo, pues para toda $x \in I$ se tiene:

$$G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por tanto, la función $G - F$ es una constante en el intervalo $I$, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que para toda $x \in I$ se tiene

$$G(x) - F(x) = c,$$

o sea

$$G(x) = F(x) + c.$$

Hemos probado el siguiente teorema.

### Teorema

Si $F$ y $G$ son dos primitivas de una misma función $f$ en un intervalo $I$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$, tal que para toda $x \in I$ se tiene

$$G(x) = F(x) + c.$$

### Nota

La hipótesis de que el conjunto $I$, donde $F$ y $G$ son primitivas de $f$, es un *intervalo*, es muy importante, ya que en caso contrario no necesariamente existe tal constante. Si el conjunto donde $F$ y $G$ son primitivas de $f$ no es un intervalo, digamos que es la unión $A$ de intervalos ajenos, entonces existirá una constante para cada uno de esos intervalos.

### Ejemplo 1

Las funciones

$$F(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x}\right)$$
$$G(x) = \frac{1}{2}x - \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$$

son primitivas de la función

$$f(x) = \frac{3\cos x + 1}{6\cos x + 10},$$

pues, es fácil verificar que

$$F'(x) = G'(x) = \frac{3\cos x + 1}{6\cos x + 10}.$$

La primera de estas, $F(x)$, lo es en todos los reales, mientras que la segunda $G(x)$ lo es en el conjunto $A$, que es la unión de todos los intervalos de la forma $\big((2n - 1)\pi, (2n + 1)\pi\big)$. Los extremos de estos intervalos son múltiplos impares consecutivos de $\pi$, por ejemplo,

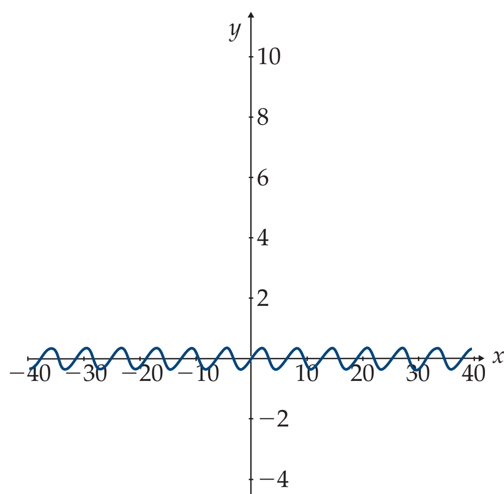
$$(-\pi, \pi), (\pi, 3\pi), (3\pi, 5\pi), \ldots$$

y también

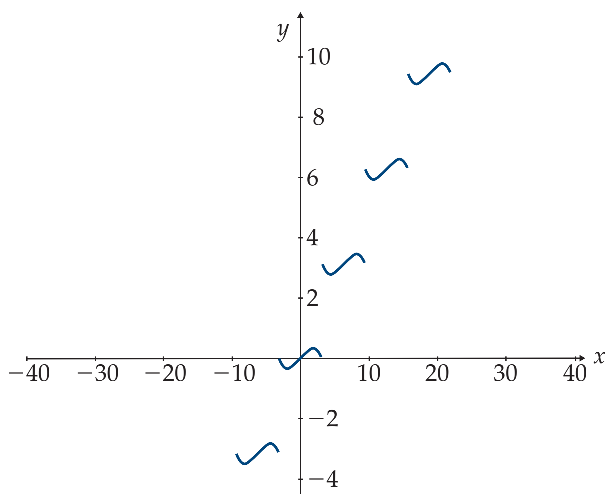
$$(-3\pi,\ -\pi), (-5\pi,\ -3\pi), (-7\pi,\ -5\pi), \ldots$$

De hecho, la función $G(x)$ solamente está definida en $A$, pues no lo está en los múltiplos impares de $\pi$.

En la siguiente figura se muestran las gráficas de ambas funciones.




$$F(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3+\cos x}\right)$$




$$G(x) = \frac{1}{2}x - \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$$

Podemos decir que ambas son primitivas en el conjunto $A$, pero no existe una constante $c$ tal que se valga la relación

$$G(x) = F(x) + c$$

para toda $x \in A$.

De hecho, para toda $x \in (-\pi,\ \pi)$ se tiene $G(x) = F(x)$, pero para $x \in (\pi,\ 3\pi)$ se cumple $G(x) = F(x) + \pi$. En el intervalo $(3\pi, 5\pi)$ se tiene $G(x) = F(x) + 2\pi$. En general, para el intervalo $\big((2n-1)\pi,\ (2n+1)\pi\big)$, la constante correspondiente es $c = n\pi$. En este intervalo se cumple la igualdad

$$G(x) = F(x) + n\pi.$$

En términos estrictos $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en una primitva de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pero $G\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ no lo es pues no tiene el mismo dominio que $f$.

Otro par de funciones que muestran una situación similar son las del siguiente ejemplo.

### Ejemplo 2

Sean las funciones

$$F(x) = \log\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

Las cuales son primitivas de la función

$$f(x) = \frac{\tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)}{1+\operatorname{sen} x},$$

pues, para todo punto $x$ donde $F$ es derivable se tiene

$$F'(x) = f(x) = \frac{\tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)}{1+\operatorname{sen} x}$$

y para todo punto $x$ donde $G$ es derivable se tiene

$$G'(x) = f(x) = \frac{\tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)}{1+\operatorname{sen} x}.$$

Como en el caso anterior, en términos estrictos, $F$ es una primitiva de $f$, pero $G$ no lo es, pues aun cuando también se tiene $G'(x) = f(x)$ para todos los puntos donde $G$ es derivable, el dominio de $G$ no es igual al dominio de $f$. Más puntualmente, la función $f$ está definida en la unión de todos los intervalos de la forma

$$\left((2n-1)\frac{\pi}{2},(2n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Por ejemplo, los intervalos

$$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right), \left(\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2}\right)\cdots$$

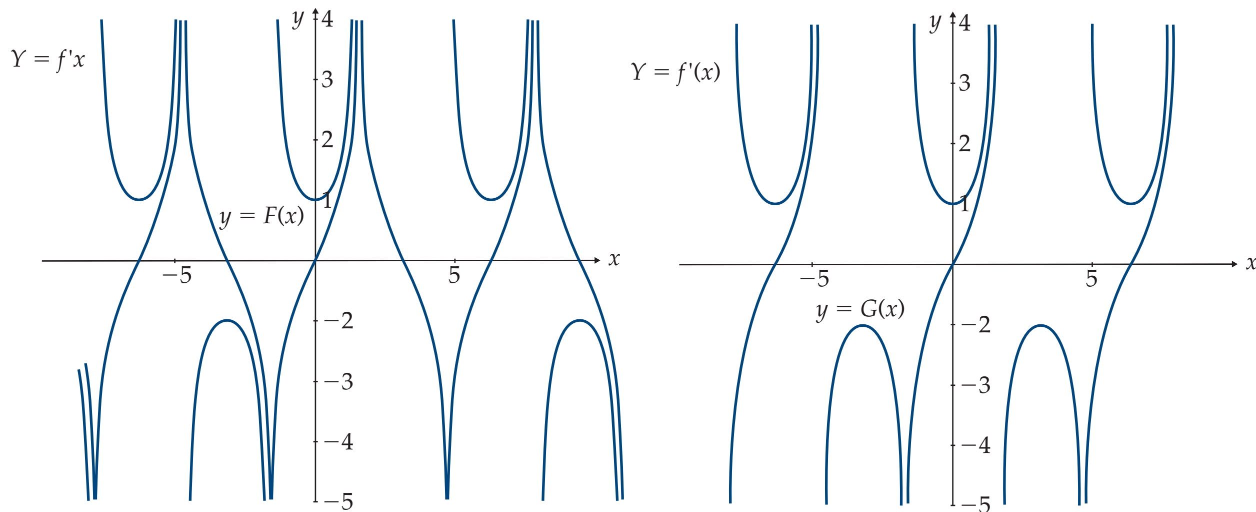
son parte del dominio de $f$. Sin embargo, la función $G$ solo está definida en algunos de los intervalos que constituyen el dominio de $f$. Por ejemplo, de los intervalos antes citados, únicamente los intervalos

$$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{2},\frac{13\pi}{2}\right)\cdots$$

forman parte del dominio de $G$.

Por lo que respecta a la función $F$, podemos afirmar que sí es una primitiva de $f$, pues ambas funciones, $f$ y $F$, tienen el mismo dominio y la igualdad $F'(x) = f(x)$ vale para todos los puntos de ese dominio común.

A continuación se muestran las gráficas de las funciones $f$, $F$ y $G$ (las gráficas de la izquierda corresponden a $f$ y $F$, mientras que las de la derecha corresponden a $f$ y $G$).




## 2.5 La integral indefinida $\int f(x)dx$

Si $f$ es una función continua en un conjunto $A$, el cual no necesariamente es un intervalo, denotaremos a la familia de primitivas de $f$ por el símbolo

$$\int f(x)dx.$$

Este es una combinación de símbolos que no se pueden desasociar; denota a todas las primitivas de la función $f$; no denota una función, representa a una familia de funciones. Ya hemos visto que cuando $f$ está definida en un *intervalo* y $F$ es una primitiva de $f$, entonces cada primitiva de $f$ es de la forma $F + c$, donde $c$ es alguna constante. Así que en este caso podemos escribir

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Con el propósito de simplificar la notación, la expresión anterior suele escribirse

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Esta notación puede causar confusión, ya que el miembro derecho de esta expresión representa una función, que no es el significado que le queremos dar. Por esa razón, se dice que $c$ es una constante arbitraria, no representa un valor específico. En realidad, $c$ denota un *parámetro*. En este caso, el parámetro nos es de utilidad para generar una familia de funciones y no una función particular. A este parámetro, es usual llamarlo **constante de integración**. Dicha "constante" se agrega después de que ya se ha hallado una primitiva $F(x)$ de $f(x)$. En el símbolo $\int f(x)\, dx$ nos referiremos a $f$ como el **integrando**. Al proceso de encontrar una primitiva $F(x)$ de $f(x)$, que nos permitirá escribir $\int f(x)dx = F(x) + c$, le llamaremos **integración**.

Aunque, al símbolo

$$\int f(x)dx$$

también suele llamarse **la integral indefinida** de $f$. El artículo determinado "la" servirá para distinguir este concepto, que se refiere a la familia de primitivas, del término **integral indefinida**, que se refiere a una función que definimos mediante una integral de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(u)du.$$

En este sentido hay una infinidad de integrales indefinidas, una para cada punto $a$ del dominio de $f$.

En resumen, el símbolo $\int f(x)dx$ representa la familia de primitivas de $f$ y nos referiremos a él como la integral indefinida de $f$. Por otra parte, a la función dada por $F(x) = \int_a^x f(u)du$ la llamaremos una integral indefinida de $f$, que se trata de una función, una primitiva de $f$, por lo cual es un elemento de la familia $\int f(x)dx$.

Por si fuera poco en todo este enredo de terminología, de los ejemplos anteriores se desprende que si el dominio de $f$ no es un intervalo, entonces la integral indefinida de $f$ (familia de primitivas de $f$) no tiene la forma

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f$ y $c$ es una constante arbitraria; la fórmula no aplica cuando el dominio de $f$ consiste de intervalos ajenos. En términos menos rigurosos, podemos decir que cuando el dominio consiste de varios intervalos ajenos, hemos de elegir constantes de integración (parámetros) distintos para los diferentes intervalos, es decir, un parámetro para cada intervalo que componga el dominio.

## 2.6 Segunda parte del teorema fundamental

Con base en lo aprendido en la primera parte del teorema fundamental del cálculo, ahora es tiempo de probar la segunda parte, con la cual quedará por completo establecida la relación de reciprocidad que guardan la derivada y la integral. Sin embargo, la principal importancia de la segunda parte del teorema fundamental radica en el hecho de que este nos facilita de forma espectacular el cálculo de integrales. Razón por la que, con toda seguridad, será de sus teoremas favoritos.




### Teorema (segunda parte del teorema fundamental)

Sea $f$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $G$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de $f$, entonces

$$\int_a^b f(u)du = G(b) - G(a).$$

Antes de proceder con la demostración del teorema, observemos que $G$ es una primitiva arbitraria, no es ninguna en particular, es cualquiera de la infinidad de primitivas que tiene $f$.

### Demostración

Sabemos que la integral indefinida

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

es una primitiva de $f$. Por consiguiente, como $G$ es otra primitiva de $f$ en el intervalo $[a, b]$, existe una constante $c$ tal que $G(x) = F(x) + c$ para toda $x \in [a, b]$. Esta constante $c$ se determina del hecho obvio

$$F(a) = \int_a^a f(u)du = 0.$$

En efecto, de la igualdad $G(x) = F(x) + c$ se sigue

$$G(a) = F(a) + c = c.$$

Así que $G(x) = F(x) + G(a)$ o sea $F(x) = G(x) - G(a)$.
Por otra parte, se tiene

$$F(b) = \int_a^b f(u)du.$$

De esta forma, de la relación $F(x) = G(x) - G(a)$ se obtiene

$$\int_a^b f(u)du = F(b) = G(b) - G(a).$$

Con esto queda demostrado el teorema.

## 2.7 Teorema fundamental del cálculo

Los teoremas a los que hemos llamado primera parte y segunda parte del teorema fundamental, constituyen (ambos) el llamado teorema fundamental del cálculo. Uno no es más importante que el otro, ambos son igualmente importantes. Algunos autores llaman teorema fundamental del cálculo a la primera parte que estudiamos, otros a la segunda y hay quienes ni siquiera les dan nombre. Desde el punto de vista práctico, quizá la segunda parte destaque en importancia, pero esta nosotros la hemos deducido de la primera, así que ambos teoremas merecen llamarse fundamentales. A continuación, enunciamos ambos de manera unificada.

### Teorema fundamental del cálculo

Sea $f$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $F$: $[a, b] \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x) = \int_a^x f(u)du.$$

Entonces

1. $F$ es derivable en cada $x \in [a, b]$ y además $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$.
2. Si $G$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ es cualquier función derivable tal que $G'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, se tiene

$$\int_a^b f(u)du = G(b) - G(a).$$

La fórmula del inciso 2 es un recurso con un gran potencial para calcular integrales $\int_a^b f(u)du$, pues para ello es suficiente encontrar una primitiva de la función $f$.

Como una primitiva de $f$ es cualquier función $G$ cuya derivada sea $f$, entonces para aplicar la fórmula anterior se requiere descubrir un proceso inverso al de derivación. Por esta razón, a las primitivas de una función también se les llama antiderivadas de la función. De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo, podemos decir que el problema de calcular una integral equivale al de invertir el proceso para encontrar la derivada; asimismo, dado que el significado geométrico de una integral es el de área de una región y que la derivada puede interpretarse como la pendiente de una recta tangente a una curva, podemos afirmar que el problema de hallar un área es el recíproco al de hallar una recta tangente.

## 2.8 Aplicaciones del teorema fundamental del cálculo

Para aplicar el teorema fundamental del cálculo, al cual en lo sucesivo nos referiremos como **TFC,** por sus siglas, necesitamos técnicas para invertir el proceso de derivación, es decir, para hallar alguna primitiva o antiderivada de una función dada. Estas técnicas se llaman métodos de integración, de los cuales presentaremos algunos en el próximo capítulo. Por el momento, baste con ilustrar el TFC con funciones cuyas primitivas son conocidas.

### Ejemplo 3

Dado que la derivada de la función $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ es $f(x) = x^n$, donde $n$ es un entero positivo, entonces, tenemos

$$\int_a^t x^n dx = \frac{1}{n+1}t^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1}.$$

En particular

$$\int_0^t x^n dx = \frac{1}{n+1}t^{n+1}.$$

### Ejemplo 4

Puesto que

$$\frac{d\,\text{sen}}{dx}(x) = \cos x,$$

tenemos

$$\int_a^b \cos x dx = \text{sen}\, b - \text{sen}\, a.$$

En particular

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \text{sen}\, \pi - \text{sen}(-\pi) = 2\,\text{sen}\, \pi = 0.$$

En el capítulo 4 retomaremos esta integral para interpretar este resultado.

En ocasiones, se dice que la integral de la función cos $x$ es la función sen $x$, esto también significa

$$\int_0^x \cos t\,dt = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} x.$$

## 2.9 La integral $\int_0^x e^{-t^2}dt$

Esta integral define una función en todos los reales. Sin embargo, es un hecho que no es posible hallar una función elemental $F(x)$, tal que su derivada sea $e^{-x^2}$. Dicho en otras palabras, no existe una función elemental $F(x)$ tal que

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = F(x) - F(0).$$

El teorema fundamental del cálculo nos permite asegurar que la función

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$$

es derivable y que además su derivada está dada por

$$G'(x) = e^{-x^2}.$$

Entonces, de lo anterior concluimos que no es posible calcular la integral usando el TFC con una primitiva que sea una función elemental. Pero también tenemos que la integral indefinida $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ es una primitiva de $e^{-x^2}$, aunque no es una función elemental, lo que quiere decir que no es posible expresar $G(x)$ mediante las operaciones aritméticas y composición de funciones, donde se usen las funciones racionales, algebraicas, exponencial logarítmicas, trigonométricas y funciones arco. Este resultado fue probado en 1835 por el notable matemático francés Joseph Liouville (1809-1882) y es un caso particular de una gran familia de integrales indefinidas que no se pueden expresar como funciones elementales. Así, de forma breve, podemos decir que la integral $\int_0^x e^{-t^2}dt$ es no elemental. Otros ejemplos de integrales no elementales, son

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ y } \int \frac{e^x}{x}dx.$$

**Joseph Liouville (1809-1882)**



Notable matemático francés. Se graduó de la École Polytechnique en 1827. Enseñó matemáticas en la misma institución donde hizo sus estudios, así como en la Facultad de Ciencias de París. Fundó la revista científica *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, la cual aún se publica, pero ahora con el nombre de *Journal de Liouville*. Escribió sobre geometría, física y análisis matemático. El teorema fundamental del álgebra es una consecuencia de uno de sus famosos teoremas sobre funciones de variable compleja. Liouville hizo un estudio sistemático sobre las funciones elementales, en donde prueba que ciertas integrales indefinidas no pueden expresarse en términos de este tipo de funciones. Liouville también es pionero en el estudio del cálculo fraccional, que se refiere al concepto de derivada de orden no entero. Por ejemplo, con ello tiene sentido hablar de la derivada de orden $\frac{1}{2}$. Como dato curioso tenemos $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \sqrt{\frac{x}{\pi}}$.

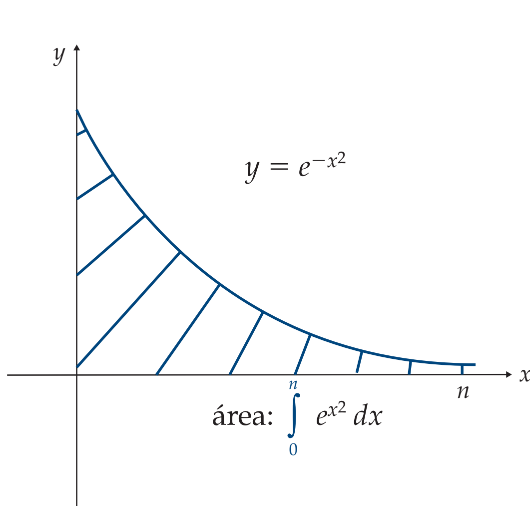
El hecho de que no pueda darse una fórmula para la integral $\int_0^x e^{-t^2}dt$, de las que por lo regular se emplean en cálculo, usualmente se traduce en expresiones como "para valores particulares de $b$, la integral $\int_0^b e^{-t^2}dt$ no puede calcularse de manera exacta", por supuesto para $b = 0$, la integral es igual a cero. Un hecho asombroso es que no obstante la imposibilidad de poder calcular con exactitud $\int_0^b e^{-t^2}dt$ , se puede probar que la sucesión de integrales

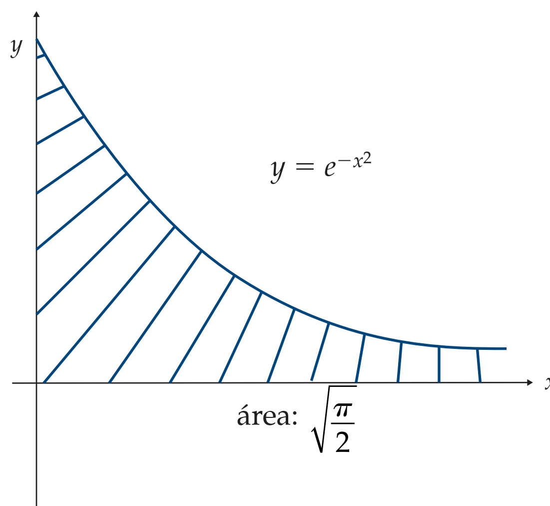
$$I_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx$$

es convergente. De hecho, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La prueba de esto no la haremos aquí, pero cabe apuntar que aun cuando la sucesión de reales $I_n$ no son reconocibles, o como dijimos antes "no se pueden calcular exactamente", su límite es $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Geométricamente, lo anterior significa que las áreas de las regiones bajo la curva $y = e^{-x^2}$ sobre los intervalos $[0, n]$ no se pueden calcular con exactitud, pero el área de la región no acotada sobre el intervalo $[0, +\infty)$ tiene el valor finito $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.




El límite $\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ también se escribe como

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Notación

Sabemos por el TFC que si $F$ es una primitiva de una función $f$ en algún intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

En lo sucesivo, esta relación también la escribiremos en cualquiera de las formas

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad .$$

Por ejemplo, podemos escribir

$$\int_a^b \cos x dx = \operatorname{sen} x\Big|_a^b .$$

### Advertencia importante

El siguiente ejemplo tiene un mensaje importante, ya que nos advertirá del cuidado que debemos tener al aplicar el TFC.

Para tal efecto, consideremos el problema de calcular la integral

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 + 3\cos x} dx,$$

para lo cual aplicaremos el TFC. Sea

$$F(x) = \frac{1}{4}\arctan\frac{4\operatorname{sen} x}{3 + 5\cos x}.$$

Por el momento no nos preguntaremos de dónde surge esa función, solo verifiquemos que ciertamente es una primitiva de $\dfrac{1}{5 + 3\cos x}$. Calculemos su derivada

$$F'(x) = \frac{1}{4}\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{4\operatorname{sen} x}{3+5\cos x}\right)}{1+\left(\dfrac{4\operatorname{sen} x}{3+5\cos x}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{(3+5\cos x)\cos x-(\operatorname{sen} x)(-5\operatorname{sen} x)}{(3+5\cos x)^2}}{\dfrac{(3+5\cos x)^2+16\operatorname{sen}^2 x}{(3+5\cos x)^2}} .$$

$$= \frac{3\cos x + 5\cos^2 x + 5\,\text{sen}^2 x}{9 + 30\cos x + 25\cos^2 x + 16\,\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{3\cos x + 5}{9 + 30\cos x + 16 + 9\cos^2 x}$$

Simplificando la expresión anterior,

$$F'(x) = \frac{5 + 3\cos x}{25 + 30\cos x + 9\cos^2 x}$$

$$= \frac{5 + 3\cos x}{(5 + 3\cos x)^2}.$$

De donde, finalmente, obtenemos

$$F'(x) = \frac{1}{5 + 3\cos x}.$$

Esto significa que la función $F(x)$ es una primitiva de $f(x) = \frac{1}{5 + 3\cos x}$. Por el teorema fundamental del cálculo, entonces tenemos

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 3\cos x}\,dx = F(\pi) - F(0).$$

Pero, $F(\pi) = \frac{1}{4}\arctan\frac{4\,\text{sen}\,\pi}{3 + 5\cos\pi} = \frac{1}{4}\arctan 0 = 0$ y obviamente $F(0) = 0$, así que

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{5 + 3\cos x}\,dx = 0.$$

Ahora, consideremos la función

$$G(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\text{sen}\,x}{3 + \cos x}\right)$$

Entonces, tenemos

$$G'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{(3 + \cos x)\cos x - (\text{sen}\,x)(-\text{sen}\,x)}{(3 + \cos x)^2}}{1 + \left(\dfrac{\text{sen}\,x}{3 + \cos x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{3\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(3 + \cos x)^2}}{\dfrac{(3 + \cos x)^2 + \text{sen}^2 x}{(3 + \cos x)^2}}.$$

Es decir

$$G'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cos x + 1}{9 + 6\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cos x + 1}{10 + 6\cos x}.$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3\cos x + 1}{5 + 3\cos x}.$$

De donde se obtiene

$$G'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{5 + 3\cos x - 3\cos x - 1}{5 + 3\cos x}.$$

O sea

$$G'(x) = \frac{1}{5 + 3\cos x}.$$

Así, hemos obtenido que $G(x)$ también es una primitiva de $\frac{1}{5 + 3\cos x}$. Por tanto, también tenemos

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 + 3\cos x}\,dx = G(\pi) - G(0).$$

Pero,

$$G(\pi) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

y $G(0) = 0$. Entonces, en este caso obtenemos

$$\int_0^\pi \frac{1}{5 + 3\cos x}\,dx = G(\pi) - G(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Así, hemos obtenido dos valores diferentes para la misma integral. ¿Hay algún error en alguno de los cálculos? ¿Por qué obtenemos resultados diferentes? ¿Cuál es el valor correcto?

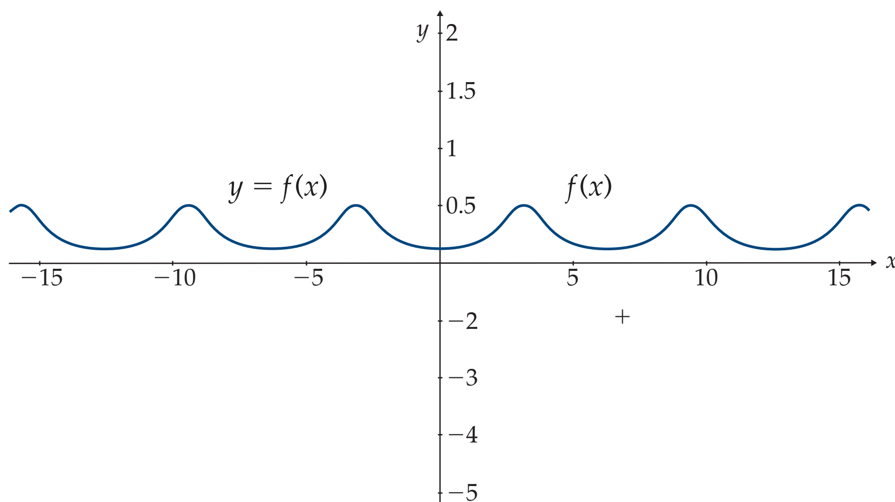
Responderemos cada una de las preguntas anteriores. En relación con los cálculos, podemos decir que no hay error alguno. Desde luego que algo anda mal, pero no es precisamente que nos hayamos equivocado en los cálculos algebraicos. Lo que ocurre es que estamos aplicando de forma indebida el teorema fundamental del cálculo en el primer caso. En apariencia, lo estamos aplicando correctamente, pues la derivada de la función

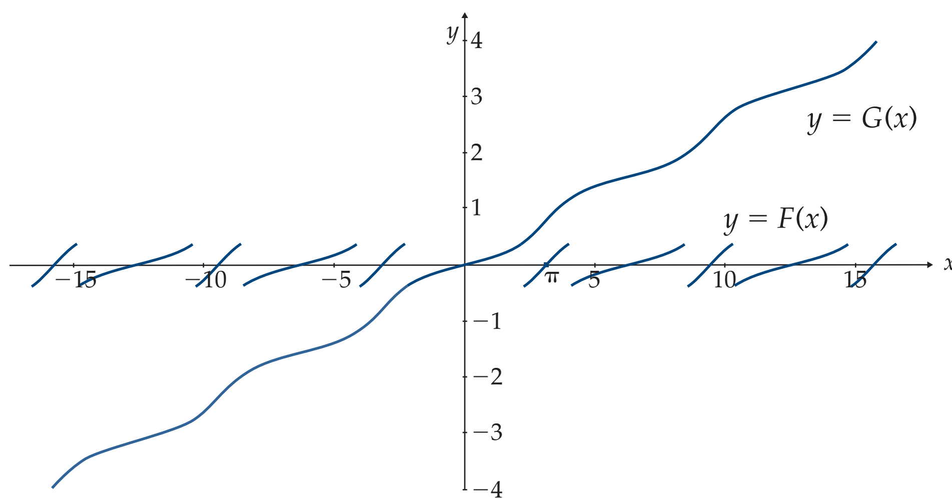
$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan\frac{4\operatorname{sen} x}{3 + 5\cos x}$$

es

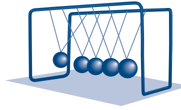
$$F'(x) = \frac{1}{5 + 3\cos x}$$

Sin embargo, esta igualdad no es válida en el intervalo $[0, \pi]$. De las dos funciones, $F(x)$ y $G(x)$, la única que es primitiva de $f(x)$ en $[0, \pi]$ es $G(x)$, pues la relación $F'(x) = f(x)$ vale para todos los puntos de $[0, \pi]$, excepto en el punto $x$ que satisface $3 + 5\cos x = 0$, es decir, excepto en el punto $x = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 2.2143$. De hecho, $G(x)$ es una primitiva en todos los reales, mientras que la función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en los reales, excepto en el conjunto de puntos que son las raíces de la ecuación $3 + 5\cos x = 0$. En estos puntos, $F(x)$ no está definida. La situación se puede entender mejor si observamos las gráficas de las tres funciones $f(x)$ y $F(x)$ y $G(x)$. Enseguida mostramos la gráfica de $f(x)$ en un sistema de referencia, mientras que las gráficas de $F(x)$ y $G(x)$ aparecen juntas en otro sistema de referencia para facilitar su comparación. Observe que las funciones $f(x)$ y $G(x)$ son continuas en todos los reales, pero no así $F(x)$. Esta función es continua en todos los puntos de su dominio el cual es diferente de $\mathbb{R}$.



## 2.10 Problemas y ejercicios



**I.** Halle las siguientes funciones $F$, definidas a través de integrales.

**1.** $F(x) = \int_0^x \left(1 + t + t^2\right) dt$

**2.** $F(y) = \int_0^{2y} \left(1 + t + t^2\right) dt$

**3.** $F(x) = \int_0^{2x} \left(1 + t + t^2\right) dt$

**4.** $F(x) = \int_{-1}^{1-x} \left(1 - 2t + 3t^2\right) dt$

**5.** $F(x) = \int_{-1}^{x} t^2\left(t^2 + 1\right) dt$

**6.** $F(x) = \int_x^{x^2} \left(t^2 + 1\right)^2 dt$

**7.** $F(x) = \int_1^{x} \left(\sqrt{t} + 1\right) dt\ ,\ x > 0$

**8.** $F(x) = \int_x^{x^2} \left(\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}\right) dt\ ,\ x > 0$

**9.** $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt$

**10.** $F(x) = \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{2} + \cos t\right) dt$

**11.** $F(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} t\right) dt$

**II.** Realice lo que se le pide.

**12.** Muestre que

$$F(x) = \int_{-2}^{x} |u|\ du = \begin{cases} \frac{1}{2}(4 - x^2) & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(4 + x^2) & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

y que también puede escribirse

$$\int_{-2}^{x} |u| du = \frac{1}{2}(4 + x|x|)$$

Esboce las gráficas del integrando $|x|$ y de la integral $\frac{1}{2}(4 + x|x|)$.

**13.** Halle la función definida por la siguiente integral y esboce su gráfica.

$$F(x) = \int_0^x \frac{x + 1 + |x - 1|}{2} du.$$

**14.** Halle la función

$$F(x) = \int_0^x [u] du.$$

**15.** Encuentre todos los valores reales de $x$, tales que

$$\int_0^x \left(t^3 - 4t\right) dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{x} \left(t - t^3\right) dt.$$

**16.** El teorema de Liouville informa cómo es el aspecto de una integral cuando es elemental, así que en este caso puede usarse como método de integración. Usando este teorema, calcule la integral

$$\int x^n e^x dx,\ (n \text{ entero positivo})$$

**17.** Diga para qué valores de $a$ y $b$, la siguiente integral

$$\int \frac{x^2 + ax + b}{(x - 1)^2} e^x dx$$

es elemental. Hállela.

**III.** Halle $F'(x)$ en cada uno de los incisos siguientes.

**18.** $F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t^2 + 1} dt$

**19.** $F(x) = \int_a^{x^4} \frac{t^4}{1 + 2t^2} dt$

**20.** $F(x) = \int_2^{e^x} \frac{\log z}{z} dz$

**21.** $F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}x^2} e^{\sqrt{2u}}\ du$

**22.** $F(x) = \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\ dt$

**23.** $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1 + t^4} dt$

**24.** $F(x) = \int_{x}^{\operatorname{sen} x} e^{-t^2}\, dt$

**IV.** Halle $f'(x)$ para cada una de las funciones siguientes.

**25.** $f'(x) = e^{\int_0^x e^{-t^2} dt}$

**26.** $f'(x) = \log_{e^x} e^{\int_0^x e^{u^2} du}$. Observe que el logaritmo no es base $e$, sino base variable $e^x$.

**V.** Calcule la derivada de la función en los puntos indicados en cada uno de los siguientes incisos.

**27.** $F(x) = \int_0^x \frac{1 - t + t^2}{1 + t + t^2}\, dt$, en $x = 1$

**28.** $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} u\, du$, en $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$

**29.** $F(x) = \int_x^5 \sqrt{1 + t^2}\, dt$, en $x = 0$, $x = \frac{3}{4}$

**30.** $F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$ en $x = \frac{\pi}{2}$

**VI.** Realice lo que se le pide.

**31.** En términos estrictos, debemos referirnos a la integral de la función $f$ definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x > 0$ y $f(0)$, cualquier valor. Si hacemos $f(x) = 1$, obtenemos una función $f$ que es continua en $x = 0$.

Halle los valores extremos de la función dada por la integral

$$F(x) = \int_0^x \frac{(u^2 + 1)u}{2 + \operatorname{sen} u}\, du.$$

Indique si se trata de un máximo o un mínimo, según sea el caso.

**32.** Sabemos que la derivada de la función $\log x$ definida en los reales positivos es $\frac{1}{x}$. Esto significa que una primitiva de la función $\frac{1}{x}$, definida en los reales positivos, es $\log x$. Ahora, pruebe que una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, definida en todos los reales $x \neq 0$, es $F(x) = \log |x|$. Grafique ambas funciones $f$ y $F$.

**33.** Pruebe que las funciones

$$f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$g(x) = \cos x \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \frac{1}{2}\cos 2x$$

son primitivas de una misma función. Halle la constante por la que difieren.

**34.** Muestre que la función $f(x) = 2 \arctan x + \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1 + x^2}$ es constante cuando $x \geq 1$. Halle el valor de esta constante.

**35.** Muestre que la función

$$f(x) = \arccos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \tan \frac{x}{2}\right)$$

donde 0 , $b \leq a$, es constante cuando $x \geq 0$.

Halle el valor de esta constante.

**36.** Verifique las fórmulas de los siguientes incisos, se supone $a^2 > b^2$.

*a)* $$\int \frac{1}{a + b \operatorname{sen} x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[x - 2\arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(a \tan \frac{x}{2} + b\right)\right)\right] + c$$

*b)* $$\int \frac{1}{a + b \cos x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[x - 2\arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2\arctan\left(\frac{a - b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan \frac{x}{2}\right)\right] + c$$

**37.** Derive las siguientes funciones

$$F(x) = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 3}\right)$$

$$G(x) = \frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{3 + \cos x + \operatorname{sen} x}{3 + \cos x - \operatorname{sen} x}\right).$$

Demuestre que ambas satisfacen

$$F'(x) = G'(x) \frac{2}{5 + 3\cos x}.$$

*a*) ¿Existe alguna constante $c$ tal que $F(x) = G(x) + c$ para toda $x$, donde están definidas ambas funciones?

*b*) Calcule $F(0)$ y $G(0)$.

*c*) Calcule $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

*d*) ¿Los resultados de los incisos *b*) y *c*) son consistentes?

**38.** Considere el problema de calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x}\,dx$$

Observe que dado que $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$, la integral indefinida $\int \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x}\,dx$ es posible considerarla inmediata.

$$\int \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x}\,dx = \int \frac{du}{2 + u^2} = \int$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,du}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}, \ (u = \tan x)$$

Por lo que es posible escribir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

Por otra parte, verifique que la función

$$G(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{2} + 3\cos 2x}\right)$$

también es una primitiva del integrando, por lo que podemos escribir

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x}\,dx =$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{2} + 3\cos 2x}\right)\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi$$

*a*) ¿Cuál resultado es correcto?

*b*) ¿Por qué uno de los dos resultados es incorrecto?

*c*) ¿Esto quiere decir que el teorema fundamental del cálculo no necesariamente da un resultado correcto?

**39.** Puesto que la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ solo toma valores positivos, su integral en cualquier intervalo no puede ser negativa, diga cuál es el error en la siguiente igualdad que se obtiene al utilizar la primitiva $F(x) = \frac{1}{x}$ y el teorema fundamental del cálculo

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1} = -2.$$

**40.** El teorema fundamental del cálculo establece que si una función $f$ es continua en un punto $x_0$, entonces la función

$$F(x) = \int_0^x f(u)du$$

es derivable en $x_0$ y la derivada en ese punto es igual a $f(x_0)$. Demuestre con un ejemplo que $F$ no necesariamente es derivable en $x_0$ si $f$ es discontinua en ese punto.

**41.** Sea $f$ derivable y satisface $f'(x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces existe una constante $k$ tal que $f(x) = ke^x$. Ahora pruebe que si $f(x) = \int_0^x f(u)du$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces $f = 0$.

**42.** Sea $a \in \mathbb{R}$. Determine $f$, si sabe que para toda $x \in \mathbb{R}$ satisface

$$f(x) = \int_0^x f(u)du + a$$

**43.** Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Halle $f$ sabiendo que para toda $x \in \mathbb{R}$ satisface

$$f(x) = a\int_0^x f(u)du + 1$$

**VII.** Halle los siguientes límites.

**44.** $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x (\arctan y)^2\,dy}{x^2 + 1}$$

**45.** $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{y^2}\,dy\right)^2}{\int_0^x e^{2y^2}dy}$$

**46.** $$\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{\tan y}}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\operatorname{sen} y}}\,dy$$

**47.** $\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h \left(\cos^8 x + x^4 \operatorname{sen}^4 x\right)dx}{h}$

**48.** $\lim_{h\to 0} \frac{\int_\pi^{\pi+h} \left(\operatorname{sen}^4 x + \tan^4\left(\frac{x}{4}\right)\right)dx}{h}$

**49.** Usando la integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, calcule el límite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

## Integrales impropias. Integrales con límites infinitos

**VIII.** Si $f$ es una función continua en un intervalo de la forma $[a, +\infty)$ y existe el límite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

escribiremos

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

A este límite lo llamaremos la *integral impropia* de $f$ en el intervalo $[a, +\infty)$. En este caso, también diremos que la integral impropia *converge*. Cuando no existe tal límite, diremos que la integral impropia *diverge*.

Muestre que las siguientes integrales impropias convergen y verifique que es igual al resultado que se indica

**50.** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1$

**51.** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

**52.** Calcule la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx\,,\ (n \geq 2)$$

**53.** Pruebe que existe la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

y calcule su valor.

**54.** Pruebe que existe la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}dx$$

y calcule su valor.

**55.** Calcule la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

**56.** Pruebe la convergencia de la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

**Ayuda:** no es necesario calcularla, pruebe su existencia comparando la exponencial $e^{-x^2}$ con la exponencial $e^{-x}$ para $x \geq 1$. Específicamente muestre que para estos puntos $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

**57.** Deduzca del problema anterior que existe la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

**IX.** Usando técnicas que no corresponden a este libro, sino a integrales de funciones de dos variables, se puede mostrar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Diga si convergen o divergen las siguientes integrales impropias.

**58.** $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$

**59.** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$

# CAPÍTULO 3

# MÉTODOS DE INTEGRACIÓN



# 3.1 Introducción

En el capítulo anterior comentamos acerca de la conveniencia de tener o desarrollar técnicas para encontrar al menos una primitiva de una función dada. Si conocemos una primitiva de una función, el teorema fundamental del cálculo nos permite calcular con asombrosa facilidad la integral de la función sobre un intervalo dado. En este capítulo estudiaremos algunas de las técnicas más populares para hallar primitivas; dichas técnicas se conocen con el nombre de **métodos de integración**. Además de estos métodos, también es útil disponer de una tabla de funciones con sus correspondientes primitivas, al menos una para cada función de la tabla, pues como ya es sabido, cuando la función en cuestión está definida en un intervalo, una primitiva de esta es suficiente para generar todas sus primitivas (pero no así cuando el dominio no es un intervalo). Después de todo, para aplicar el TFC es suficiente una primitiva, cualquiera va igual de bien.

# 3.2 Precisiones sobre la integral indefinida $\int f(x)dx$

En el capítulo 2 convenimos representar con el símbolo $\int f(x)dx$ a la familia de primitivas de una función continua $f$. Si esta función está definida en un intervalo y $F$ es una primitiva de $f$, entonces la familia de primitivas de $f$ puede generarse de manera especial; es el conjunto de funciones $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$. Es decir

$$\int f(x)dx = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

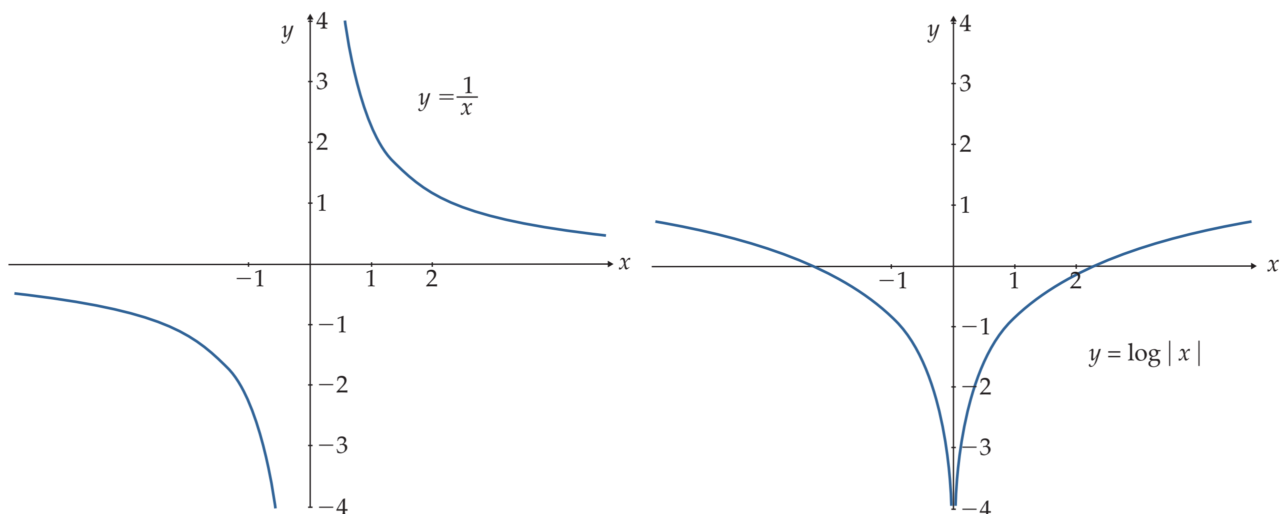
La notación anterior suele simplificarse como

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Es importante insistir que en la expresión anterior, el miembro derecho no representa una función particular, sino que es una manera abreviada de representar un conjunto de funciones, donde la letra $c$ denota un parámetro con el cual se genera una familia de funciones. Cuando la función $f$ está definida y es continua en diversos intervalos ajenos, debe elegirse un parámetro para cada uno de los intervalos. Por ejemplo, la integral indefinida

$$\int \frac{1}{x}dx$$

representa todas las primitivas de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Esta función está definida en la unión de intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Una primitiva de $f(x)$ es $\log|x|$, la cual está definida en el mismo dominio.

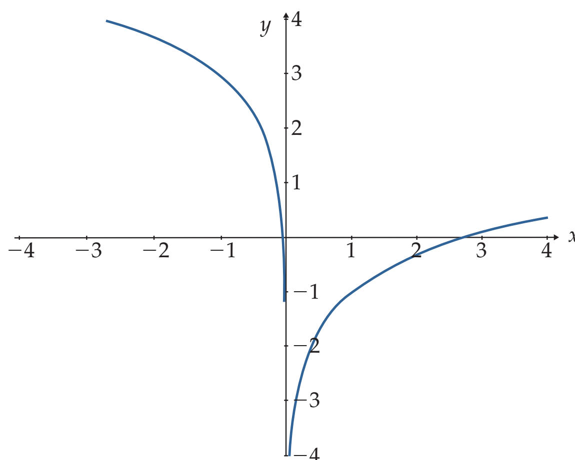



Observe que la función $\log x$ no es primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, pues solo está definida en el intervalo $(0, \infty)$ . Sin embargo, la función $\log |x|$ tiene el mismo dominio que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y está definida como

$$\log|x| = \begin{cases} \log x & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \log(-x) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Es fácil verificar que otra primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ está dada por

$$F(x) = \begin{cases} \log x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \log(-x) + 3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



Es notable que aun cuando $F(x)$ es una primitiva de $f(x)=\frac{1}{x}$, es falso que exista una constante $c$, tal que se cumpla $F(x) = \log|x| + c$ para toda $x$ en el dominio de $f(x)=\frac{1}{x}$. Sin embargo, se cumple $F(x) = \log|x| + 3$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y $F(x) = \log|x| - 1$ en $(0, \infty)$, por lo que no hay una constante $c$ tal que se valga $F(x) = \log|x| + c$ para toda $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

En este caso recurrimos a dos constantes de integración para generar la integral indefinida (familia de primitivas) de $\frac{1}{x}$; así tenemos

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \log(-x)+c_1 & \text{si } x<0 \\ \log x + c_2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Obviamente también podemos escribir

$$\int \frac{1}{x}dx = \begin{cases} \log|x|+c_1 & \text{si } x<0 \\ \log|x|+c_2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Por cierto, resulta un buen ejercicio mostrar que la expresión anterior también puede escribirse en una forma unificada, como

$$\int \frac{1}{x}dx = \log\left|\frac{-k_1x+|k_1x|}{2}+\frac{k_2x+|k_2x|}{2}\right|$$

donde $k_1$ y $k_2$ son parámetros positivos; aunque esta fórmula también puede escribirse de diferentes maneras. Si reemplazamos $\frac{1}{2}k_1=\alpha_1>0$ y $\frac{1}{2}k_2=\alpha_2>0$, la expresión anterior se escribe así:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}dx &= \log\left|\alpha_1(-x+|x|)+\alpha_2(x+|x|)\right| \\ &= \log\left|(-\alpha_1+\alpha_2)x+(\alpha_1+\alpha_2)|x|)\right|\end{aligned}$$

Al variar $\alpha_1$ y $\alpha_2$ sobre todos los reales positivos, generamos todas las primitivas de $\frac{1}{x}$.

Si desea obtener la primera de estas fórmulas le sugerimos considerar lo siguiente:

1. Para cualquier real $c$ hay un real positivo $k$ tal que $c = \log k$.
2. De las propiedades de los logaritmos se tiene:

$$\log|x|+c=\log|x|+\log k=\log(k|x|)=\log|kx|$$

3. Use la expresión $\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$; esta permite obtener en cada punto $x$ el máximo de los valores $f(x)$ y $g(x)$, es decir:

$$\text{máx}(f(x),g(x))=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \text{ (¿Por qué?).}$$

4. Si $k_1 > 0$, la función $h_1(x)=\frac{-k_1x+|k_1x|}{2}=k_1\frac{-x+|x|}{2}$ es cero para $x \geq 0$ e igual a $k_1|x|$ para $x < 0$.

5. Si $k_2 > 0$, la función $h_2(x) = \frac{k_2 x + |k_2 x|}{2} = k_2 \frac{x + |x|}{2}$ es cero para $x \leq 0$ e igual a $k_2 |x|$ para $x > 0$.

Aunque es incorrecto escribir:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

con frecuencia usaremos esta expresión, en el entendido de que, en todo caso, el miembro derecho representa solo una parte de la familia de primitivas de la función $\frac{1}{x}$. De hecho, también escribiremos:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$$

Donde el símbolo $\int \frac{1}{x} dx$ representa solo una primitiva. En ocasiones la constante de integración será irrelevante, así que cuando no dé lugar a confusión utilizaremos el símbolo $\int f(x)dx$ para representar una primitiva particular; esto es, este símbolo en ocasiones representará una primitiva y en otras a la familia de primitivas.

Después de hacer estas precisiones acerca de la integral indefinida $\int f(x)dx$ y de la constante de integración, haremos algunas convenciones más, todas relacionadas con el símbolo $\int f(x)dx$.

Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas en un mismo intervalo. Si $F$ y $G$ son primitivas de ambas funciones, respectivamente; es decir, si $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$ para toda $x$ en el dominio común, entonces se sigue de las propiedades de la derivada que $F + G$ es una primitiva de $f + g$. De acuerdo con el significado de la integral indefinida, tenemos

$$\int f(x)dx = F(x) + c_1$$
$$\int g(x)dx = G(x) + c_2$$
$$\int (f + g)(x)dx = (F + G)(x) + c_3.$$

La última de estas relaciones significa que la familia de primitivas de $f + g$ se puede generar con la suma de dos primitivas de $f$ y $g$, respectivamente. Este hecho lo representamos por

$$\int (f + g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

En términos estrictos, el miembro derecho de la expresión anterior es la suma de dos familias de funciones, que puede interpretarse como la que se obtiene sumando cada una de las funciones de la familia $\int f(x)dx$, con cada una de las de la familia $\int g(x)dx$. Sin embargo, como ya se dijo, el significado que le daremos a la igualdad anterior y que no contradice el significado estricto, es que la familia de primitivas de $f + g$ se genera con la suma de cualquier primitiva de $f$ más cualquier primitiva de $g$.

Si las funciones $f$ y $g$ están definidas en una unión de intervalos ajenos, entonces la igualdad anterior se vale en cada uno de los intervalos que componen el dominio. Para no complicar demasiado las fórmulas, vamos a convenir que la igualdad

$$\int (f + g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

vale en cada uno de los intervalos ajenos que constituyen el dominio común de $f$ y $g$.

Con estas convenciones, entonces tenemos las siguientes propiedades

- Si $f$ y $g$ son continuas, entonces $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
- Si $f$ es continua y $k$ es un real, entonces $\int (kf)(x)dx = k\int f(x)dx$.

## 3.3 Integrales inmediatas

Una manera trivial de construir una tabla de primitivas es tomar cualquier función $f(x)$ y derivarla, en cuyo caso $f(x)$ será una primitiva de $f'(x)$ . Si procedemos de esta manera para cada una de las funciones elementales básicas, podemos construir una útil tabla de funciones con sus primitivas, a las cuales llamaremos **integrales inmediatas**. Dada la importancia de estas integrales inmediatas, en la siguiente tabla presentamos algunas de las más comunes y utilizadas:

| |
|---|
| $\int k dx = kx + c$ |
| $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$ |
| $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ($n$ entero positivo) |
| $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ ($r$ real, $r \neq -1$) |
| $\int \frac{1}{x}dx = \log x + c$ |
| $\int \cos x dx = -\text{sen } x + c$ |
| $\int \text{sen } x dx = \cos x + c$ |
| $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$ |
| $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$ |
| $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$ |
| $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsen}(x) + c$ |
| $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + c$ |
| $\int \frac{1}{\mid x \mid \sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}(x) + c$ |

Es importante insistir en que las integrales anteriores, las hemos obtenido mediante el procedimiento simple de derivar las funciones elementales básicas, de ahí que se llamen **integrales inmediatas**. Otras integrales, como $\int \tan x\, dx$ o $\int \sec x\, dx$ no se obtienen de esta manera, un cálculo requiere de procedimientos un tanto más complicados. Esto lo haremos más adelante.

## 3.4 Cambio de variable

La regla de la cadena establece una fórmula para derivar una composición de funciones: si $f$ es derivable en $g(x)$ y $g$ lo es en $x$, entonces $f \circ g$ es derivable en $x$ y además se tiene

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

De esta relación concluimos que una primitiva de la función $f'(g(x))g'(x)$ es $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. En términos de la integral indefinida, podemos escribir

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + c.$$

Esta relación es válida siempre y cuando la función $f'(g(x))g'(x)$ esté definida en un intervalo; si lo está en la unión de intervalos ajenos, debemos elegir un parámetro diferente para cada uno de esos intervalos, por tanto, es importante conocer el dominio de la función $f'(g(x))g'(x)$.

La fórmula anterior es una de las más utilizadas para hallar primitivas de funciones dadas; nos referiremos a ella como la **fórmula de cambio de variable**. Así, de esta fórmula se desprenden las generalizaciones de las integrales de la tabla anterior.

| |
|---|
| $\int u(x)^r u'(x)dx = \frac{1}{r+1} u(x)^{r+1} \quad (r \neq -1)$ |
| $\int \frac{1}{u(x)} u'(x)dx = \log \lvert u(x) \rvert + c$ |
| $\int \cos u(x) u'(x)dx = -\text{sen}\, u(x) + c$ |
| $\int \text{sen}\, u(x) \cdot u'(x)dx = \cos u(x) + c$ |
| $\int \sec^2 u(x) \cdot u'(x)dx = \tan u(x) + c$ |
| $\int \csc^2 u(x) \cdot u'(x)dx = -\cot u(x) + c$ |
| $\int \sec u(x) \tan u(x) \cdot u'(x)dx = \sec u(x) + c$ |
| $\int \csc u(x) \cot u(x) \cdot u'(x)dx = -\csc u(x) + c$ |
| $\int e^{u(x)} u'(x)dx = e^{u(x)} + c$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-u(x)^2}} u'(x)dx = \text{arcsen}\, u(x) + c$ |

| |
|---|
| $\int \frac{1}{u(x)^2+1} u'(x)dx = \arctan u(x) + c$ |
| $\int \frac{1}{\lvert u(x) \rvert \sqrt{u(x)^2 - 1}} u'(x)dx = \operatorname{arcsec} u(x) + c$ |

### Ejemplo 1

Calculemos la integral

$$\int (x+1)^4 dx.$$

Si hacemos $u(x) = x + 1$, entonces tenemos $u'(x) = 1$, por lo que la integral anterior se escribe

$$\int (x+1)^4 dx = \int u(x)^4 u'(x)dx = \frac{1}{5} u(x)^5 + c.$$

Así que

$$\int (x+1)^4 dx = \frac{1}{5}(x+1)^5 + c.$$

### Ejemplo 2

Calculemos la integral

$$\int (x^3+1)^n x^2 dx.$$

Para tal efecto, se debe escribir como

$$\int (x^3+1)^n x^2 dx = \frac{1}{3}\int (x^3+1)^n 3x^2 dx.$$

Escrita de esta manera, hacemos $u(x) = x^3 + 1$. Entonces, tenemos $u'(x) = 3x^2$ y podemos anotar

$$\begin{aligned}
\int (x^3+1)^n x^2 dx &= \frac{1}{3}\int (x^3+1)^n 3x^2 dx \\
&= \int u(x)^n u'(x) dx \\
&= \frac{1}{n+1} u(x)^{n+1} + c \\
&= \frac{1}{n+1} (x^3+1)^{n+1} + c.
\end{aligned}$$

### Ejemplo 3

Para calcular la integral

$$\int xe^{-x^2} dx$$

escribamos

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx\,.$$

Escrita la integral de esta manera, hagamos $u(x) = -x^2$. De esta forma, tenemos $u'(x) = -2x$; por consiguiente, podemos anotar

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2}dx &= -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)dx\\ &= -\frac{1}{2}\int e^{u(x)}u'(x)dx\\ &= -\frac{1}{2}e^{u(x)} + c\\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\,.\end{aligned}$$

### Ejemplo 4

Calculemos la integral

$$\int x^3 \operatorname{sen}^3 x^4 \cos x^4\, dx.$$

Si en esta integral hacemos $u(x)=$ sen $x^4$, tenemos $u'(x)=(\cos x^4)\,4x^3$. Así que podemos escribir

$$\begin{aligned}\int 4x^3 \operatorname{sen}^3 x^4 \cos x^4 dx &= \int u(x)^3 u'(x)dx\\ &= \frac{1}{4}u(x)^4 + c\\ &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x^4 + c.\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\int x^3 \operatorname{sen}^3 x^4 \cos x^4 dx &= \frac{1}{4}\int 4x^3 \operatorname{sen}^3 x^4 \cos x^4 dx\\ &= \frac{1}{16}\operatorname{sen}^4 x^4 + c\,.\end{aligned}$$

### Ejemplo 5

En el cálculo de integrales de funciones racionales es muy común el uso de la integral inmediata

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c\,.$$

Sin embargo, necesitaremos una generalización de la misma. Así, mediante un cambio de variable, nos será posible obtener una fórmula para la integral más general

$$\int \frac{1}{a^2+b^2(x+\beta)^2}\,dx.$$

Antes de definir el cambio de variable, escribamos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+b^2(x+\beta)^2}\,dx &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2(x+\beta)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}x+\frac{b\beta}{a}\right)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Ahora, es claro el cambio de variable que haremos. Sea $u(x) = \frac{b}{a}x + \frac{b\beta}{a} = \frac{b}{a}(x+\beta)$. Entonces, tenemos $u'(x) = \frac{b}{a}$, así que podemos escribir

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2+b^2(x+\beta)^2}\,dx &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}x+\frac{b\beta}{a}\right)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{a^2}\frac{a}{b}\int \frac{\frac{b}{a}}{1+u^2}\,dx\\ &= \frac{1}{ab}\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{ab}\arctan u(x)+c.\end{aligned}$$

Sustituyendo $u(x)$, finalmente obtenemos

$$\int \frac{1}{a^2+b^2(x+\beta)^2}\,dx = \frac{1}{ab}\arctan\frac{b}{a}(x+\beta)+c.$$

### Ejemplo 6

Aquí veremos cómo aplica la fórmula del ejemplo anterior. Calculemos la integral

$$\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx\cdot$$

Completando cuadrados, escribimos

$$x^2+4x+7=(x+2)^2+3.$$

Por tanto, tenemos

$$\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx = \int \frac{1}{3+(x+2)^2}\,dx$$

así que

$$\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{1}{3}(x+2)+c$$

Esta integral no es inmediata, pero es una consecuencia simple de una de estas $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$.

**Ejemplo 7**

Calcular $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$.

**Solución**

Primero, hagamos $u(x) = e^x+1$. Entonces, tenemos

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\,dx$$
$$= \int \frac{u'(x)}{u^2(x)}\,dx$$
$$= -\frac{1}{u(x)}.$$

O sea

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx = -\frac{1}{e^x+1}+c.$$

## 3.5 Las integrales $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log|u(x)|$ y $\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan u(x)$

### Reconocimiento de integrales inmediatas

Si $u(x)$ es una función derivable en un intervalo $I$, la función $\frac{u'(x)}{u(x)}$ está definida en todos los puntos $x \in I$ que satisfagan $u(x) \neq 0$.

Al aplicar la regla de la cadena tenemos $\frac{d}{dx}\log|u(x)| = \frac{u'(x)}{u(x)}$ para todos los puntos $x \in I$ donde $u(x) \neq 0$. Entonces, tenemos

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log|u(x)|.$$

De manera similar, de la regla de la cadena se sigue

$$\frac{d}{dx}\arctan u(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

De donde obtenemos

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan u(x).$$

Es importante destacar que estas dos fórmulas de integrales son muy socorridas en cálculo y que pueden aparecer en formas muy diversas, por lo que es conveniente adquirir alguna destreza en el reconocimiento de estas. Con este propósito, enseguida vemos algunos ejemplos, aunque también se recomienda al lector que se entrene calculando varias integrales de estos tipos que se incluyen en la lista de ejercicios, donde hay una variedad tan grande de situaciones que con seguridad lo encontrará divertido.

### Ejemplo 8

Una integral que se usa con frecuencia es

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx \cdot$$

Esta integral no es inmediata, pero recurriremos a un truco que nos permitirá identificarla como suma de dos integrales inmediatas.

Para lo cual, se puede verificar con facilidad la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right]\\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}.\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\,dx+\int \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{(-1)}{1-x}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\log|1-x|+\frac{1}{2}\log|1+x|.\end{aligned}$$

Así, hemos hecho el cambio de variable $u = 1 - x$ para la integral $\int \frac{(-1)}{1-x}dx$, mientras que para la integral $\int \frac{1}{1+x}dx$ hicimos el cambio $u = 1 + x$. Entonces, tenemos

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \log\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}\cdot$$

### Ejemplo 9

Una de las aplicaciones de la fórmula anterior es el cálculo de la integral

$$\int \sec x dx.$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} dx .\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$, obtenemos

$$\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{1}{1-u^2} du.$$

Por consiguiente, del ejercicio anterior tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} dx &= \int \frac{1}{1-u^2} du \\ &= \log \sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|} \\ &= \log \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} \\ &= \log \sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x}} \\ &= \log \sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x}} \\ &= \log \left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| .\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} dx = \log \left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right| = \log |\sec x + \tan x| .$$

Así pues, finalmente obtenemos la importante fórmula

$$\int \sec x dx = \log |\sec x + \tan x| + c.$$

**Ejemplo 10**

La integral $\int \cot x dx$ es de la forma $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$.

En efecto, si hacemos $u(x) = \operatorname{sen} x$ tenemos

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx$$

Entonces, tenemos

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \int \log\left|\operatorname{sen} x\right| + c\,.$$

### Ejemplo 11

De manera similar al ejemplo anterior, aquí se plantea el cálculo de la siguiente integral

$$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -\int \frac{(-1)\operatorname{sen} x}{\cos x} dx\,.$$

O sea

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= -\log\left|\cos x\right| + c\\ &= \log\frac{1}{\left|\cos x\right|} + c\\ &= \log\left|\sec x\right| + c\end{aligned}$$

### Ejemplo 12

Calcular $\int \frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x} dx$.

### Solución

Haciendo $u(x) = e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$, tenemos

$$u'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x} dx &= 2\int \frac{\frac{1}{2}\sqrt{e^x}}{1+\left(\sqrt{e^x}\right)^2} dx\\ &= \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx\\ &= \arctan u(x) + c\,.\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{\sqrt{e^x}}{1+e^x} dx = \arctan\sqrt{e^x} + c.$$

### Ejemplo 13

Calcular $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x} dx$.

### Solución

Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, tenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2} dx$$

Si hacemos $u(x) = \operatorname{sen}^2 x$, tenemos $u'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$, así que

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}dx &= \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\left(\operatorname{sen}^2 x\right)^2}dx_i \\ &= \int \frac{u'(x)}{1+\left(u^2 x\right)^2}dx \\ &= \arctan u(x) + c.\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}dx = \arctan \operatorname{sen}^2(x) + c.$$

### Ejemplo 14

Calcular $\int \frac{1}{x+x\log^2 x}dx$.

### Solución

Primero, escribamos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+x\log^2 x}dx &= \int \frac{1}{x\left(1+\log^2 x\right)}dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{x}}{1+\log^2 x}dx.\end{aligned}$$

Ahora hagamos

$$u(x) = \log x.$$

Entonces, tenemos

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+x\log^2 x}dx &= \int \frac{\frac{1}{x}}{1+\log^2 x}dx \\ &= \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}dx \\ &= \arctan u(x) + c.\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{1}{x+x\log^2 x}dx = \arctan(\log x) + c.$$

**Ejemplo 15**

Calcular $\int \frac{1}{x+\log x^x} dx.$

**Solución**

Primero escribamos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\log x^x} dx &= \int \frac{1}{x+x\log x} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{x}}{1+\log x} dx.\end{aligned}$$

Ahora hagamos

$$u(x)=1+\log x.$$

Entonces tenemos

$$u'(x)=\frac{1}{x}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\log x^x} dx &= \int \frac{\frac{1}{x}}{1+\log x} dx \\ &= \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx \\ &= \log\left|u(x)\right| + c.\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{1}{x+\log x^x} dx = \log\left|1+\log x\right| + c.$$

## 3.6 Integración por partes

El método que estudiaremos en esta sección nos proporciona un poderoso recurso para encontrar primitivas o integrales indefinidas. Se trata de una de las fórmulas más populares de las técnicas de integración, la cual recibe el nombre de **fórmula de integración por partes**. Enseguida vamos a deducirla.

De la regla para la derivada de un producto de funciones

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

se obtiene la relación

$$f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x).$$

Si $S(x)$ es una primitiva de $f(x)g'(x)$ y $T(x)$ es una primitiva de $f'(x)g(x)$, la relación anterior se escribe

$$S'(x) = (fg)'(x) - T'(x).$$

Suponiendo que todas estas relaciones se valen en un intervalo, podemos concluir que existe una constante $c$ tal que

$$S(x) = f(x)g(x) - T(x) + c.$$

De acuerdo con nuestras convenciones, podemos escribir

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Esta relación es a la que propiamente llamaremos fórmula de integración por partes.

La fórmula anterior es un poderoso recurso para calcular integrales indefinidas o, lo que es lo mismo, para calcular las primitivas de una función dada.

Así, nos referiremos a la aplicación de la fórmula de integración por partes como el **método de integración por partes** o simplemente **integración por partes**.

En la práctica, la fórmula de integración por partes es,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

suele escribirse en la notación de Leibniz

$$\int fdg = fg - \int gdf.$$

De hecho, es muy popular la forma en términos de $u$ y $v$

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Independientemente de la forma que desee adoptar, conviene adquirir cierta destreza para su aplicación, pues la integración por partes es uno de los recursos más útiles para el cálculo de integrales indefinidas, como lo mostraremos enseguida. En este libro usaremos indistintamente cualquiera de estas formas.

Como podemos observar, la fórmula de integración por partes nos permite transformar una integral $\int f(x)g'(x)dx$ en otra integral $\int f'(x)g(x)dx$. En notación de Leibniz, en lugar de calcular la integral $\int udv$, calculamos $\int vdu$.

Para la aplicación de esta fórmula, es importante comentar que no hay regla que nos indique cómo elegir las funciones $f(x)$ y $g(x)$ o las funciones $u$ y $v$ . En general, un integrando $h(x)$ puede interpretarse como producto $f(x)$ y $g'(x)$ en una gran cantidad de maneras, de hecho en una infinidad, por ejemplo una factorización trivial es $h(x) = h(x) \cdot 1$, en cuyo caso $f(x) = h(x)$ y $g'(x) = 1$, o sea $g(x) = x$, con lo que se obtiene

$$\int h(x)dx = \int h(x)\cdot 1dx = h(x)\cdot x - \int xh'(x)dx$$

También podemos hacer $h(x) = \frac{1}{2}h(x) \cdot 2$, en donde $f(x) = \frac{1}{2}h(x)$ y $g'(x) = 2$, es decir $g(x) = 2x$. Para esta elección tenemos,

$$\int h(x)\,dx = \int \frac{1}{2}h(x) \cdot 2dx = \frac{1}{2}h(x) \cdot 2x - \int 2x\left(\frac{1}{2}h'(x)\right)dx$$

o sea

$$\int h(x)dx = xh(x) - \int xh'(x)\,dx.$$

Así, hemos obtenido la misma relación que con la primera elección, por lo que es posible decir que la segunda elección no nos conduce a nada nuevo.

Otra factorización (quizá inútil, pero al fin de cuentas válida) es $f(x) = (1 + x^2)\, h(x)$ y $g'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, es decir $g(x) = \arctan x$. En este caso, la fórmula de integración por partes queda

$$\int h(x)\,dx = \int (1+x^2)h(x)\frac{1}{1+x^2}dx = (1+x^2)h(x)\arctan x - \int \arctan x \cdot ((1+x^2)h(x))'dx.$$

La práctica y la destreza que vaya adquiriendo, le ayudarán a hacer la mejor elección.

A continuación presentamos un ejemplo que ilustra la elección trivial $f(x) = h(x)$ y $g'(x) = 1$.

### Ejemplo 16

Calculemos la integral

$$\int \log(x)dx.$$

Aplicando la fórmula

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int f'(x)xdx$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int \log(x)\,dx &= x\log x - \int \frac{1}{x}xdx \\ &= x\log x - \int 1dx \\ &= x\log x - x + c. \end{aligned}$$

De donde finalmente obtenemos

$$\int \log(x)dx = x(\log x - 1) + c.$$

### Ejemplo 17

A la integral del ejemplo anterior, la podemos generalizar en la forma

$$\int x^n \log x dx.$$

Hagamos

$$u = \log x \quad \text{y} \quad dv = x^n\,dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = \frac{1}{x}dx \quad \text{y} \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Por tanto, aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int x^n \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \int \frac{1}{n+1}x^n dx.$$

O sea

$$\int x^n \log x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + c.$$

## Ejemplo 18

Ahora consideremos la integral

$$\int \frac{1}{x}\log x dx.$$

Apliquemos la fórmula de integración por partes haciendo

$$u = \log x \quad \text{y} \quad dv = \frac{1}{x}dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = \frac{dx}{x} \quad \text{y} \quad v = \log x.$$

A primera vista, esto pareciera un círculo vicioso, sin embargo, veamos cómo queda la fórmula

$$\int \frac{1}{x}\log x dx = (\log x)^2 - \int \log x \cdot \frac{1}{x}dx.$$

De esta relación podemos despejar la integral original, con lo que obtenemos

$$\int \frac{1}{x}\log x dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + c.$$

Veamos un ejemplo que ilustre una elección no adecuada.

## Ejemplo 19

Una integral clásica que se calcula mediante el método de integración por partes es $\int \sec^3 x dx$.

Para calcular esta integral, hagamos en la fórmula de integración por partes $f(x) = \sec x$ y $g'(x) = \sec^2 x$, es decir $g(x) = \tan x$ y $f'(x) = \sec x \tan x$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \int \sec x \cdot \sec^2 x dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \cdot \tan x dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot \sec x dx. \end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, obtenemos

$$\int \tan^2 x \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx$$

$$= \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx.$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot \sec x dx \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x dx - \int \sec^3 x dx \\ &= \sec x \tan x + \log|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx. \end{aligned}$$

En esta última relación despejamos $\int \sec^3 x dx$, para finalmente obtener

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \log|\sec x + \tan x| + c\,.$$

Veamos un ejemplo que ilustre una elección no adecuada.

### Ejemplo 20

Consideremos la integral

$$\int xe^x dx.$$

Entre las diversas elecciones que podemos hacer, consideremos

$$u = e^x \quad \text{y} \quad dv = xdx.$$

En este caso tenemos

$$du = e^x dx \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2} x^2.$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes,

$$\int xe^x dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x - \int \frac{1}{2} x^2 e^x dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx\,.$$

Hemos transformado el problema de calcular la integral $\int xe^x dx$ en el de calcular $\int x^2 e^x dx$. La elección que hemos hecho no ayuda a calcular la integral original, por el contrario, ha complicado el problema. De cualquier manera, nuestro trabajo no ha sido totalmente inútil pues de la relación anterior podemos despejar $\int x^2 e^x dx$, con lo que obtenemos

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int xe^x dx.$$

Si calculamos la integral original $\int xe^x dx$, entonces con esta fórmula es posible calcular la integral $\int x^2 e^x dx$.

Después de la elección infructuosa, hagamos la siguiente

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^x dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = e^x.$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

De donde finalmente podemos escribir

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + c.$$

Usando la fórmula anterior, ahora podemos calcular $\int x^2 e^x dx$:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2\int xe^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x-1)e^x + c \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + c\end{aligned}$$

Así que la primera elección que no resultó muy acertada, ahora tiene sus frutos. Este resultado sugiere el problema de calcular la integral general

$$I_n = \int x^n e^x dx,$$

donde $n$ es cualquier entero positivo.

Para esta integral hagamos

$$u = x^n \quad \text{y} \quad dv = e^x dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = nx^{n-1}\, dx \quad \text{y} \quad v = e^x.$$

Ahora, sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

De esta forma, hemos reducido el problema de calcular la integral $I_n = \int x^n e^x dx$ al de calcular $I_{n-1} = \int x^{n-1} e^x dx$. La relación anterior es llamada de recurrencia y también es posible escribirla como

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1.}$$

### Ejemplo 21

Usando integración por partes, calculemos la integral

$$\int x \operatorname{sen} x dx.$$

Hagamos

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x.$$

De la fórmula de integración por partes se sigue

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x - \int (-\cos x)\, dx = -x \cos x + \int \cos x dx.$$

Por consiguiente,

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + c.$$

Si hubiésemos elegido

$$u = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad dv = xdx,$$

obtendríamos

$$du = \cos x dx \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}x^2.$$

Con lo cual tendríamos

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x dx.$$

Al menos en apariencia, la integral $\int x^2 \cos x dx$ es más complicada que la original, así que es razonable desistir de continuar por este camino.

La integral $\int x \cos x dx$ se calcula de manera similar. De esta forma, si hacemos

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = \cos x dx,$$

tenemos

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = \operatorname{sen} x.$$

Por tanto,

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + c.$$

## 3.7 La fórmula $\int h(x)\,dx = xh(x) - \int xh'(x)\,dx$

En la sección anterior vimos que una aplicación de la fórmula de integración por partes, $\int udv = uv - \int vdu$, al cálculo de una integral $\int h(x)dx$ se efectúa con la elección trivial, $u = h(x)$ y $dv = dx$, de modo que $du = h'(x)dx$ y $v = x$. Con esta elección, la fórmula queda

$$\int h(x)dx = xh(x) - \int xh'(x)dx.$$

Esta fórmula no es una ociosidad, pues en la sección antes referida la aplicamos al cálculo de la integral

$$\int \log x dx = x(\log x - 1) + c.$$

De hecho esta fórmula tiene interesantes aplicaciones, por lo que se sugiere observarla con la perspectiva de que puede simplificarnos el problema de integración. Para que la fórmula rinda frutos, debe conducirnos a integrales más simples, así que cabe preguntarse: ¿en qué casos $xh'(x)$ es una función más simple que $h(x)$? Expresémoslo de otra manera: ¿en qué circunstancias $xh'(x)$ es más fácil de integrar que $h(x)$?

El único ejemplo en el que hemos ilustrado el uso de esta fórmula es con la función $h(x) = \log x$; en este caso, $xh'(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ es más simple que $h(x) = \log x$. Sin embargo, hay otros casos interesantes; para hallar algunos otros baste recordar las derivadas de algunas funciones elementales. Por cierto, si $h(x)$ es un polinomio, las funciones $h(x)$ y $xh'(x)$ son del mismo grado, así que son igualmente complejas (si es que tienen alguna complejidad). Algunas funciones no triviales donde se observa este fenómeno de simplificación son

$$h(x) = \arctan x, \qquad xh'(x) = x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$h(x) = \text{arc cot}\, x, \qquad xh'(x) = -x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$h(x) = \text{arc sen}\, x, \qquad xh'(x) = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h(x) = \text{arc cos}\, x, \qquad xh'(x) = -x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h(x) = \text{arc sec}\, x, \qquad xh'(x) = x \cdot \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$h(x) = \text{arc csc}\, x, \qquad xh'(x) = -x \cdot \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Obsérvese que para las dos últimas funciones debemos tomar en cuenta que

$$x \cdot \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En la siguiente sección se establecen las fórmulas de las integrales de estas funciones.

## 3.8 Integrales de las funciones arco

Para calcular la integral

$$\int \text{arcsen}\, x dx$$

hagamos

$$u = \text{arcsen}\, x \quad \text{y} \quad dv = dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{y} \quad v = x.$$

En este caso, la fórmula de integración por partes queda como

$$\int \operatorname{arcsen} x dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

La integral del miembro derecho es inmediata

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

por lo que obtenemos

$$\int \operatorname{arcsen} x dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

De manera similar, para la integral

$$\int \arccos x dx$$

hagamos

$$u = \arccos x \quad \text{y} \quad dv = dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \text{y} \quad v = x.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \arccos x dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

O sea

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

Ahora, calculemos la integral

$$\int \arctan x dx.$$

En este caso hacemos

$$u = \arctan x \quad \text{y} \quad dv = dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad \text{y} \quad v = x.$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Finalmente, de aquí se obtiene

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c = x \arctan x - \log\sqrt{1+x^2} + c.$$

Ahora, calculemos:

$$\int \operatorname{arccot} x dx.$$

Para ello, hacemos

$$u = \operatorname{arccot} x \quad \text{y} \quad dv = dx.$$

Entonces, tenemos

$$du = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad v = x.$$

Por tanto, al sustituir en la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arccot} x dx &= x\operatorname{arccot} x - \int x \frac{(-1)}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{arccot} x + \int \frac{x}{1+x^2} dx.\end{aligned}$$

De donde, finalmente tenemos

$$\int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c = x \operatorname{arccot} x + \log\sqrt{1+x^2} + c.$$

Ahora, toca el turno a las integrales

$$\int \operatorname{arcsec} x dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{arccsc} x dx$$

Para la primera, con la elección

$$u = \operatorname{arcsec} x \quad \text{y} \quad dv = dx$$

tenemos

$$du = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{y} \quad v = x.$$

Entonces, al aplicar la fórmula de integración por partes obtenemos:

$$\int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arcsec} x - \int x \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Como se puede observar, aquí nos encontramos ante una situación nueva. La función integrando

$$H(x)=x\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

está dada por

$$H(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x<-1\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Una primitiva de esta función se obtiene hallando una primitiva en cada uno de los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(-1,+\infty)$. En la sección 3.15 mostraremos que $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$ en todo el dominio de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, es decir en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Así que una primitiva de $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ en $(-\infty,-1)$ es:

$$-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$$

De modo similar, una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ en $(1,+\infty)$ es $\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$. Entonces, una primitiva de $H(x)$ es:

$$\int H(x)dx=\int x\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx=\begin{cases}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| & \text{si } x<-1\\ \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| & \text{si } x>1.\end{cases}$$

La cual se escribe como:

$$\int x\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{x}{|x|}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$$

De aquí obtenemos

$$\int \operatorname{arcsec} x\,dx=x\operatorname{arcsec} x-\int x\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Finalmente tenemos

$$\int \operatorname{arcsec} x\,dx=x\operatorname{arcsec} x-\frac{x}{|x|}\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c.$$

El cálculo para la integral $\int \operatorname{arccsc} x\,dx$ es muy similar; en este caso, si hacemos

$$u=\operatorname{arccsc} x \quad \text{y} \quad dv=dx$$

tenemos

$$du=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{y} \quad v=x.$$

Entonces

$$\int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \int x \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Como

$$\int x \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{x}{|x|} \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$$

Obtenemos

$$\int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \frac{x}{|x|} \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c.$$

## 3.9 Integrando por partes $\int \frac{1}{x} dx$

La fórmula de integración por partes $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$ entraña algunas sutilezas que reflexionamos ahora. En la sección 3.7 ya aplicamos la fórmula de integración por partes a una integral $\int h(x)dx$, haciendo la elección trivial $f(x) = h(x)$ y $g'(x) = 1$, que equivale a elegir $u = h(x)$ y $dv = dx$ en la fórmula $\int udv = uv - \int vdu$. Con esta elección tenemos la fórmula

$$\int h(x)dx = xh(x) - \int xh'(x)dx.$$

Supóngase que tratamos de aplicar esta fórmula al cálculo de la integral $\int \frac{1}{x} dx$; en este caso, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} dx &= x \cdot \frac{1}{x} - \int x\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)dx \\ &= 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx.\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx.$$

De esta relación, no solo no podemos calcular la integral $\int \frac{1}{x} dx$, sino que al simplificarla obtenemos el absurdo:

$$0=1$$

¿Hubo algún error de cálculo? La respuesta es que no lo hubo. Entonces, ¿qué ocurre? Lo que sucede es que, en realidad, sí hay un error, pero este no es de cálculo, sino que se relaciona con un mal manejo de lo que representa el símbolo $\int \frac{1}{x} dx$, pues este representa la familia de primitivas de la función $h(x) = \frac{1}{x}$, la cual se trata de una familia de funciones y no de una función particular.

La igualdad

$$\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$$

es correcta y significa una igualdad de familia de funciones; es una igualdad de conjuntos, no es una igualdad de dos funciones. Lo que expresa esta igualdad es que la familia de primitivas de $h(x) = \frac{1}{x}$ que representamos por $\int \frac{1}{x}dx$ es igual a la familia de funciones $1 + \int \frac{1}{x}dx$ que resulta de sumar 1 a cada función de la misma familia $\int \frac{1}{x}dx$. Esto resulta más claro si usamos la notación de conjuntos. Así, en esta notación, la igualdad referida se escribe

$$\left\{F(x) \middle| F'(x) = \frac{1}{x} \text{ para toda } x \neq 0\right\} = 1 + \left\{F(x) \middle| F'(x) = \frac{1}{x} \text{ para toda } x \neq 0\right\}$$
$$= \left\{1 + F(x) \middle| F'(x) = \frac{1}{x} \text{ para toda } x \neq 0\right\}$$

Para evitar este tipo de aparentes paradojas, esta interpretación es la misma que también debemos dar a la fórmula:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Con el propósito de dar más claridad a este asunto, simplemente recordemos cómo se estableció la fórmula de integración por partes.

Como

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

tenemos

$$f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x)$$

Luego, se integran ambos miembros de esta igualdad para obtener

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

Pero, integrar significa tomar toda la familia de primitivas. Si pensásemos en tomar solo una primitiva de cada término, tendríamos que razonar de la siguiente manera:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)g'(x)$; entonces, se cumple $F'(x) = f(x)g'(x)$. Si $G(x)$ es una primitiva de $f'(x)g(x)$; entonces, ahora se cumple $G'(x) = f'(x)g(x)$. Una primitiva trivial de $(fg)'(x)$ es $f(x)g(x)$. De este modo, surge la siguiente pregunta: ¿de la igualdad $f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x)$ podemos deducir que se cumple la siguiente igualdad?

$$F(x) = f(x)g(x) - G(x).$$

La respuesta es que no siempre se vale esta igualdad. Pero, lo que sí podemos afirmar es que, dado que dos primitivas en un intervalo de una misma función difieren en una constante, entonces existe un real $c$ tal que

$$F(x) = f(x)g(x) - G(x) + c.$$

Pues, en este caso, $F(x)$ es una primitiva del miembro izquierdo de

$$f(x)g'(x)=(fg)'(x)-f'(x)g(x)$$

y $f(x)g(x) - G(x)$ es una primitiva del miembro derecho (y ambos miembros representan una misma función). Entonces, $F(x)$ y $f(x)g(x) - G(x)$ difieren en una constante. Esta es la explicación. Si bien es simple, no siempre se es consciente de esta. Para evitar posibles confusiones, conviene escribir la fórmula de integración por partes como

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx + c.$$

## 3.10 La integral $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$

Sabemos que la derivada de la función arctan $x$ es $\frac{1}{1+x^2}$, así que tenemos la integral inmediata

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c.$$

Una integral similar (aunque dista mucho de ser inmediata) es

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx.$$

La integral general

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

resulta todavía más difícil de calcular; donde $n$ es un entero mayor que 1. En esta sección obtendremos una fórmula recursiva. Así, escribiremos la integral $I_n$ en términos de la integral $I_{n-1}$ y aplicando sucesivamente esta reducción de grado, obtendremos eventualmente la integral $I_n$ en términos de $I_1$.

Consideremos, pues, la integral $I_n$. Escribamos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx \\ &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx\ .\end{aligned}$$

Calculemos la integral $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx$ mediante la fórmula de integración por partes.

De esta forma, en la fórmula

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx,$$

hagamos

$$f(x) = x \quad \text{y} \quad g'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

Entonces, tenemos $f'(x) = 1$ y

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \frac{x}{(1+x^2)^n}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^n}dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{-n+1}(1+x^2)^{-n+1} \\ &= -\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx &= -\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int (-1)\frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx \\ &= -\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx \\ &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx. \end{aligned}$$

Al simplificar, obtenemos

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

O sea

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}dx + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Esta fórmula también la escribimos como

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

La fórmula anterior expresa la integral $I_n$ en términos de la integral $I_{n-1}$. Por ejemplo,

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx = \frac{3}{8} \arctan x + \frac{3}{8} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

La fórmula de recurrencia deducida aquí será de especial utilidad en la siguiente sección, la cual está dedicada a la integración de funciones racionales.

## 3.11 Integración de funciones racionales

Recordemos que una función racional es cualquiera de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales, con $q(x)$ diferente del polinomio cero. Por ejemplo, las siguientes funciones son racionales

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6} \\ g(x) &= \frac{x}{x^2-4} \\ h(x) &= \frac{x^3-3x+1}{x^2-3x+2}. \end{aligned}$$

Un caso especial de las funciones racionales $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es cuando el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$; a estas funciones las llamaremos **funciones racionales propias**. En los ejemplos anteriores, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales propias, mientras que $h(x)$ no lo es. Una función racional no propia siempre puede escribirse como la suma de un polinomio más una función racional propia.

Para expresar una función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, que no es propia como suma de un polinomio más una función racional propia, podemos aplicar el algoritmo de la división para polinomios, con esto obtendremos un cociente $Q(x)$ y un residuo $R(x)$, ambos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & Q(x) \\ \hline q(x) & p(x) \\ & \ \ \ddots \\ & \ \ \ \ R(x) \end{array}$$

donde el grado del residuo $R(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. Así, con estos polinomios podemos escribir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}.$$

Por ejemplo, $h(x)$ no es una función racional propia, pero "realizando la división $p(x)$ entre $q(x)$", podemos expresarla como

$$h(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{4x - 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

En nuestro método para integrar funciones racionales, serán especialmente importantes las funciones racionales propias de la forma

$$\frac{1}{(x - a)^k} \quad \text{y} \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k}$$

donde $k$ es cualquier entero positivo y el polinomio cuadrático $x^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, por lo que no puede factorizarse como producto de factores de grado 1 con coeficientes reales.

En particular, destacan los casos simples con $k = 1$:

$$\frac{1}{x - a} \quad \text{y} \quad \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}$$

La importancia de esta clase de funciones racionales radica en el hecho de que toda función racional propia siempre puede escribirse como suma de funciones racionales de ese tipo, a una expresión de tal naturaleza la llamaremos *descomposición en fracciones parciales*.

Para aplicar este método de integración, se requieren las fórmulas para las integrales

$$\int \frac{1}{(x - a)^k}\,dx \quad \text{y} \quad \int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k}\,dx.$$

La primera se calcula con facilidad; en esta distinguimos dos casos:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \log|x-a|$$
$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$$

para $k = 2, 3,\ldots$

La segunda de las integrales se reduce a dos tipos, los cuales surgen al escribir

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}dx &= A\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^k}dx + B\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b-b}{(x^2+bx+c)^k}dx + B\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx \\ &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}dx + \left(B-\frac{Ab}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx.\end{aligned}$$

La integral

$$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{du}{u^k}$$

es inmediata, mientras que la segunda, $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx$, se puede escribir en la forma

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{1}{(\alpha^2+(x+\beta)^2)^k}dx = \frac{1}{\alpha^{2k}}\int \frac{1}{(1+u^2)^k}du.$$

Para estas últimas integrales, tenemos una fórmula recursiva establecida en la sección anterior.

Para descomponer en fracciones parciales una función racional propia $\frac{p(x)}{q(x)}$, se requiere descomponer en factores de grado 1 o cuadráticos el polinomio $q(x)$. Si conocemos las raíces del polinomio $q(x)$, que son las de la ecuación $q(x) = 0$, es fácil factorizarlo. Un polinomio $q(x)$ puede tener raíces reales, complejas o de ambos tipos. Si $r$ es una raíz real de $q(x)$, entonces el polinomio $x - r$ es un factor de $q(x)$. Por otra parte, las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales, siempre vienen en pares conjugados, es decir, si $\alpha + i\beta$ es una raíz compleja de $q(x)$, entonces el conjugado $\alpha - i\beta$ también es raíz de $q(x)$. En este caso, el polinomio cuadrático $x^2 + 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) = (x + \alpha + i\beta)\,(x - \alpha - i\beta)$ es factor de $q(x)$. Por cada raíz $r$, hay un factor $x-r$, y por cada par de raíces complejas conjugadas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$, hay un factor cuadrático de la forma $x^2 + 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)$. Así que todo polinomio $q(x)$ puede factorizarse en la forma

$$q(x)= a(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_k)(x^2+b_1x+c_1)\ldots(x^2+b_mx+c_m).$$

Los factores $x - r_i$ corresponden a las raíces reales $r_1, r_2,\ldots, r_k$ y los factores cuadráticos $x^2 + b_ix + c_i$ corresponden a sus raíces complejas conjugadas. Por ejemplo, dado que las raíces del polinomio $q(x) = x^2 - 5x + 6$ son 2 y 3, podemos escribir $q(x) = (x - 2)(x - 3)$. De igual modo, dado que el polinomio $q(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ tiene por raíz al 1, entonces tiene por factor el polinomio $x - 1$, al realizar la división de $q(x)$ entre $x - 1$ obtenemos el cociente $x^2 + 4$, por lo que podemos

factorizar $q(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x - 1)(x^2 + 4)$. Como seguramente ya observó, si conocemos un factor de $q(x)$, al dividir este polinomio entre el factor conocido, obtenemos una factorización de $q(x)$, por lo que podemos dedicarnos a factorizar los factores de $q(x)$ para hacerlo por completo en la forma deseada.

Las raíces de un polinomio pueden repetirse; cuando este es el caso, decimos que la raíz correspondiente es **múltiple**. Si una raíz múltiple se repite dos veces, decimos que es de multiplicidad 2; en general, si se repite $k$ veces decimos que es de multiplicidad $k$. Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene como única raíz al 1, la cual es de multiplicidad 2; en este caso, el polinomio se factoriza como

$$p(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2.$$

Una raíz que no es múltiple, decimos que es **simple**. En cuyo caso, también diremos que es de multiplicidad 1. Tomando en cuenta las multiplicidades de las raíces de un polinomio $q(x)$, la factorización

$$q(x)= (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_k)(x^2 + b_1x + c_1)\ldots(x^2 + b_mx + c_m)$$

puede escribirse en la forma

$$q(x)= (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}\ldots (x - r_s)^{m_s}(x^2 + b_1x + c_1)^{n_1}\ldots (x^2 + b_k x + c_k)^{n}$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son todas las raíces reales diferentes, de multiplicidades respectivas $m_1, m_2, \ldots, m_s$ y todos los factores $x^2 + b_1x + r_1, \ldots, x^2 + b_kx + c_k$ son distintos. En esta expresión está implícito que el polinomio tiene $k$ raíces complejas diferentes de multiplicidades respectivas $n_1, n_2, \ldots, n_k$, con sus correspondientes raíces conjugadas de las mismas multiplicidades. Para el caso de las raíces simples, los correspondientes exponentes son iguales a 1.

Para un polinomio dado, la determinación de todas sus raíces es un problema que en general resulta difícil. Aunque existen métodos que nos permiten hallarlas en casos especiales, en general es imposible encontrar las raíces de manera exacta.

El siguiente teorema puede resultarnos útil en la práctica y se prueba con facilidad. Su demostración se puede consultar en cualquier libro de álgebra que contenga el tema de teoría de ecuaciones.

### Teorema

Si un polinomio

$$P(x) = a_mx^m = a_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

tiene coeficientes enteros, entonces todas sus raíces enteras son divisores del término independiente $a_0$.

Es importante notar que este teorema no dice que todos los divisores del término independiente $a_0$ sean raíces del polinomio, sino que si algún entero es raíz del polinomio, entonces necesariamente es divisor de $a_0$. Cuando el polinomio tiene raíces enteras, el teorema nos permite hallar todas ellas, siempre y cuando tengan coeficientes enteros; para esto, será suficiente ensayar con cada uno de los divisores del término independiente, con el propósito de averiguar cuál o

cuáles son raíces. El polinomio no tendrá raíces enteras que no sean estos divisores, pues no hay otra posibilidad para las raíces enteras. Para aplicar el teorema, es necesario hacer una lista de todos los divisores, positivos y negativos, del término independiente $a_0$, para lo cual será útil descomponerlo en todos sus factores primos.

### Ejemplo 22

Se sugiere al lector que halle los divisores enteros del término independiente de los siguientes polinomios, para obtener su factorización

Polinomios:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \\
G(x) &= x^2 - 3x + 2 \\
H(x) &= x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \\
S(x) &= x^4 - x^3 - x + 1 \\
T(x) &= x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 19x^2 + 16x + 12
\end{aligned}
$$

Factorización:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \\
G(x) &= x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = (x + 2)(x + 3)(x + 1)(x - 1) \\
H(x) &= x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1) \\
S(x) &= x^4 - x^3 - x + 1 = (x - 1)^2(x^2 + x + 1) \\
T(x) &= x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16x - 48 = (x - 3)(x^2 + 4)^2
\end{aligned}
$$

Supongamos una función racional propia $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, de la cual podemos factorizar su denominador $q(x)$ en factores lineales y cuadráticos. Entonces, esta función se podrá escribir como suma de fracciones simples. El teorema general que trata esta descomposición se enunciará más adelante, por el momento estudiemos algunos casos particulares importantes acerca de las raíces de $q(x)$.

## 3.11.1 Caso raíces reales simples

Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una función racional propia. Si el polinomio $q(x)$ se factoriza en factores de grado 1 simples

$$q(x) = (x - r_1)\,(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

entonces $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ puede descomponerse en la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - r_n}.$$

Los coeficientes $A_1$ pueden calcularse como sigue.

Multipliquemos ambos miembros por $x - r_1$, así tenemos

$$\frac{p(x)}{q(x)}(x - r_1) = A_1 + \frac{A_2}{x - r_2}(x - r_1) + \cdots + \frac{A_n}{x - r_n}(x - r_1).$$

El miembro derecho toma el valor $A_1$ en $x = r_1$. No obstante que el miembro izquierdo no puede valuarse en $x = r_1$ , pues $q(x)$ y $x - r_1$ se anulan simultáneamente en $x = r_1$, podemos calcular su límite cuando $x \to r_1$, lo que, a fin de cuentas, nos es igualmente útil, pues este tendrá que ser igual al límite correspondiente del miembro derecho, el cual es igual al valor que toma el miembro derecho en $x = r_1$. Para calcular el límite, escribamos

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}(x - r_1) &= \frac{p(x)}{\frac{q(x)}{x - r_1}} \\ &= \frac{p(x)}{\frac{q(x) - q(0)}{x - r^1}}\end{aligned}$$

El hecho de que $r_1$ sea una raíz simple, garantiza que $q'(r_1) \neq 0$. De esta forma, podemos concluir que existe el límite del último término de la expresión anterior, por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to r_1}\frac{p(x)}{q(x)}(x - r_1) &= \lim_{x\to r_1}\frac{p(x)}{\frac{q(x) - q(0)}{x - r_1}} \\ &= \frac{\lim_{x\to r_1} p(x)}{\lim_{x\to r_1}\frac{q(x) - q(0)}{x - r_1}} \\ &= \frac{p(r_1)}{q'(r_1)}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$A_1 = \frac{p(r_1)}{q'(r_1)}.$$

Este procedimiento es aplicable para cualquiera de los coeficientes $A_1$, con base en esto obtenemos el siguiente teorema.

### Teorema

Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una función racional propia, tal que $q(x)$ se descompone en factores de grado 1 simples

$$q(x) = (x - r_1)\,(x - r_2)\ldots(x - r_n).$$

Entonces, los coeficientes $A_i$ de la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - r_n}$$

están dados por

$$A_1 = \frac{p(r_i)}{q'(r_i)}.$$

El teorema anterior es un recurso para calcular los coeficientes de la descomposición en fracciones parciales, cuando el denominador solo tiene raíces reales simples, sin embargo, en la práctica podemos recurrir al siguiente procedimiento.

Multipliquemos ambos miembros de la expresión

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - r_n}$$

por $q(x)$:

$$p(x) = \frac{A_1 q(x)}{x - r_1} + \frac{A_2 q(x)}{x - r_2} + \cdots + \frac{A_n q(x)}{x - r_n}.$$

Dado que $q(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$, cada cociente $\frac{q(x)}{x - r_i}$ es el producto de los factores lineales de $q(x)$, con excepción del factor $x - r_i$. Por ejemplo,

$$\frac{q(x)}{x - r_1} = (x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$
$$\frac{q(x)}{x - r_2} = (x - r_1)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$
$$\frac{q(x)}{x - r_3} = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_4)\ldots(x - r_n).$$

Todos los cocientes

$$\frac{q(x)}{x - r_2}, \frac{q(x)}{x - r_3}, \ldots, \frac{q(x)}{x - r_n},$$

tienen el factor común $x - r_1$, por lo que se anulan en $x = r_1$. Además, el cociente $\frac{q(x)}{x - r_1}$ no tiene este factor, de hecho

$$\frac{q(x)}{x - r_1} = (x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n),$$

así que

$$q'(r_1) = \lim_{x \to r_1} \frac{q(x)}{x - r_1} = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)\ldots(r_1 - r_n)$$

que es una "forma de evaluar" $\frac{q(x)}{x - r_1}$ en $x = r_1$, es decir

$$\left.\frac{q(x)}{x-r_1}\right|_{x=r_1} = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)\ldots(r_1 - r_n).$$

### Ejemplo 23

Para descomponer en fracciones parciales la función racional

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(x-2)}.$$

Escribamos

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Para determinar los coeficientes $A$, $B$ y $C$, multipliquemos ambos miembros por $q(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$ , con lo cual obtenemos

$$x^2 + 1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1).$$

Haciendo en la expresión anterior $x = 1$, obtenemos

$$2 = A(2)(-1)$$

de donde obtenemos A $= -1$. Procedamos de manera similar para obtener los valores de $B$ y $C$. Ahora, hagamos $x = -1$; entonces, tenemos

$$2 = B(-2)(-3).$$

Por tanto, $B = \frac{1}{3}$. Si finalmente hacemos $x = 2$, obtenemos $5 = 3C$, de esta forma $C = \frac{5}{3}$. Con esto, hemos calculado los coeficientes de la descomposición en fracciones parciales, con lo cual podemos escribir

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{5}{3}}{x-2}.$$

## 3.11.2 Caso raíces reales simples o múltiples

A continuación enunciamos un teorema más general, que nos permite desarrollar una función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ en fracciones parciales y calcular los coeficientes respectivos, para el caso en el que el polinomio $q(x)$ solo tenga raíces reales, sean simples o múltiples.

### Teorema

Si $\frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional propia, tal que $q(x)$ se factoriza en la forma

$$q(x) = (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}\ldots(x - r_s)^{m_s}$$

donde $m_1$, $m_2$, …, $m_s$ son números naturales, entonces $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ puede descomponerse en una suma de fracciones parciales, tales que a cada factor $(x - r)^m$ le corresponde una sumatoria de la forma

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - r)^m}$$

donde los coeficientes $A_i$ pueden calcularse con las fórmulas

$$A_i = \frac{1}{(m - i)}\frac{d^{m-i}}{dx^{m-i}}\left((x - r)^m \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{(m - 1)}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left((x - r)^m \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}\\
A_2 &= \frac{1}{(m - 2)!}\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\left((x - r)^m \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}\\
&\vdots\\
A_{m-1} &= \frac{d}{dx}\left((x - r)^m \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}\\
A_m &= \left((x - r)^m \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}.
\end{aligned}$$

Por ejemplo, si $m = 2$, la sumatoria correspondiente es

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x - r)^2}$$

y los coeficientes $A_1$ y $A_2$ están dados por

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{d}{dx}\left((x - r)^2 \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}\\
A_2 &= \left((x - r)^2 \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}.
\end{aligned}$$

Si $m = 3$, los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left((x - r)^3 \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}\\
A_2 &= \frac{d}{dx}\left((x - r)^3 \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}\\
A_3 &= \left((x - r)^3 \frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=r}.
\end{aligned}$$

Aun cuando las fórmulas anteriores nos proporcionan un recurso sistemático para calcular los coeficientes de la descomposición en fracciones parciales, en la práctica algunos de estos pueden calcularse mediante un procedimiento similar al expuesto para el caso de raíces reales simples, mientras que los otros pueden calcularse manipulando las expresiones, para obtener polinomios que nos conducirán a un sistema de ecuaciones en donde las incógnitas serán los coeficientes a determinar. Veamos algunos ejemplos.

### Ejemplo 24

Sea la función racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3(x+2)^2(x-3)}.$$

Esta puede descomponerse en fracciones parciales en la forma

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3(x+2)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

Para hallar los coeficientes de la expresión anterior, multipliquemos ambos miembros por $q(x) = x^3(x+2)^2(x-3)$ , con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 1 = A_1x^2(x+2)^2(x-3) + A_2x(x+2)^2(x-3) + A_3(x+2)^2(x-3) \\ + B_1x^3(x+2)(x-3) + B_2x^3(x-3) + Cx^3(x+2)^2. \end{aligned}$$

Si hacemos $x = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= A_3(2)^2(-3) \\ 1 &= -12\,A_3. \end{aligned}$$

De donde tenemos $A_3 = -\frac{1}{12}$. De la misma manera, si hacemos $x = -2$, obtenemos $-15 = 40B_2$, o sea $B_2 = -\frac{3}{8}$ y con $x = 3$, $C = \frac{2}{135}$. Hemos calculado

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{1}{12} \\ B_2 &= -\frac{3}{8} \\ C &= \frac{2}{135}. \end{aligned}$$

Nos resta calcular $A_1$, $A_2$ y $B_1$. Para eso, desarrollemos el miembro derecho de la expresión

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 1 = A_1x^2(x+2)^2(x-3) + A_2x(x+2)^2(x-3) + A_3(x+2)^2(x-3) \\ + B_1x^3(x+2)(x-3) + B_2x^3(x-3) + Cx^3(x+2)^2 \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$x^3 - 2x^2 + 1 = (A_1 + B_1 + C)x^5 + (A_1 - B_1 + 4C + A_2 + B_2)x^4 - (8A_1 + 6B_1 - 4C - A_2 - A_3 + 3B_2)x^3 + (-12A_1 + 8A_2 - A_3)x^2 - 4(3A_2 + 2A_3)x - 12A_3.$$

Del coeficiente de $x$, obtenemos $3A_2 + 2A_3, = 0$, por tanto

$$A_2 = -\frac{2}{3}A_3 = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{12}\right),$$

o sea

$$A_2 = \frac{1}{18}.$$

Del coeficiente de $x^2$, tenemos $12A_1 + 8A_2 - A_3 = 2$. Sustituyendo los valores obtenidos de $A_2$ y $A_3$, se tiene

$$\begin{aligned} 12A_1 &= 2 - 8A_2 + A_3 \\ &= 2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{53}{36} \end{aligned}$$

o sea

$$A_1 = \frac{53}{432}.$$

Finalmente, obtenemos $B_1$ del coeficiente de $x^5$, que es $A_1 + B_1 + C = 0$. Sustituyendo los valores de $A_1$ y $C$, tenemos

$$\begin{aligned} B_1 &= -A_1 - C \\ &= -\frac{53}{432} - \frac{2}{135} \\ &= -\frac{11}{80}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3(x+2)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3(x+2)^2(x-3)} = \frac{\frac{53}{432}}{x} + \frac{\frac{1}{18}}{x^2} - \frac{\frac{1}{12}}{x^3} - \frac{\frac{11}{80}}{x+2} - \frac{\frac{3}{8}}{(x+2)^2} + \frac{\frac{2}{135}}{x-3}.$$

### 3.11.3 Caso general, raíces reales o complejas simples o múltiples

Ahora, debemos suponer que en la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$, el polinomio $q(x)$ tiene raíces reales o complejas, las cuales pueden ser simples o múltiples. De esta forma, supongamos que $q(x)$ se factoriza en la forma

$$q(x) = (x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_s)^{m_s}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_kx+c_k)^{n_k}.$$

En este caso, $\frac{p(x)}{q(x)}$ puede escribirse como suma de fracciones parciales, tal que a cada factor $(x-r)^m$ le corresponde una sumatoria de la forma

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-r)^m}$$

y a cada factor de $(x^2+bx+c)^n$, le corresponde una sumatoria de la forma

$$\frac{A_1+B_1x}{x^2+bx+c}+\frac{A_2+B_2x}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_n+B_nx}{(x^2+bx+c)^n}\,.$$

**Ejemplo 25**

Desarrollemos en fracciones parciales la función racional

$$\frac{x^5+4x^4+11x^3+17x^2+22x+20}{(x-1)^2(x^2+4)^2}.$$

Debemos hallar los coeficientes de la expansión

$$\frac{x^5+4x^4+11x^3+17x^2+22x+20}{(x-1)^2(x^2+4)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por $(x-1)^2(x^2+4)^2$, obtenemos

$$\frac{x^5+4x^4+11x^3+17x^2+22x+20}{(x-1)^2(x^2+4)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

$$\begin{aligned}x^5+4x^4+11x^3+17x^2+22x+20 &= A(x-1)(x^2+4)^2+B(x^2+4)^2\\ &\quad +(C+Dx)(x-1)^2(x^2+4)+(Ex+F)(x-1)^2.\end{aligned}$$

Al igualar coeficientes de las potencias correspondientes en el desarrollo

$$\begin{aligned}x^5+4x^4+11x^3+17x^2+22x+20 &= (A+C)x^5+(-A+B-2C+D)x^4\\ &\quad +(8A+5C-2D+E)x^3+(-8A+8B-8C+5D-2E+F)x^2\\ &\quad +(16A+4C-8D+E-2F)x+(-16A+16B+4D+F)\end{aligned}$$

obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -A + B - 2C + D &= 4 \\ 8A + 5C - 2D + E &= 11 \\ -8A + 8B - 8C + 5D - 2E + F &= 17 \\ 16A + 4C - 8D + E - 2F &= 22 \\ -16A + 16B + 4D + F &= 20 \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{array}{ll} A = 2 & B = 3 \\ C = -1, & D = 1 \\ E = 2, & F = 0. \end{array}$$

Así, tenemos

$$\frac{x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 17x^2 + 22x + 20}{(x-1)^2(x^2+4)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{-x+1}{x^2+4} + \frac{2x}{(x^2+4)^2}.$$

Como se dijo al inicio de esta sección, la descomposición en fracciones parciales de una función racional nos facilita calcular su integral indefinida, pues en esencia esta será la suma de integrales de la forma

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx, \int \frac{1}{(Ax^2+Bx+C)^n}dx = \int \frac{1}{(a^2+b^2(x-\beta)^2)^n}dx\,.$$

Ilustremos el método con las funciones racionales de los ejemplos anteriores, de los cuales conocemos su descomposición en fracciones parciales.

### Ejemplo 26

Calculemos la integral

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}dx.$$

Para esto, utilicemos el desarrollo en fracciones parciales que obtuvimos antes

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{5}{3}}{x-2}.$$

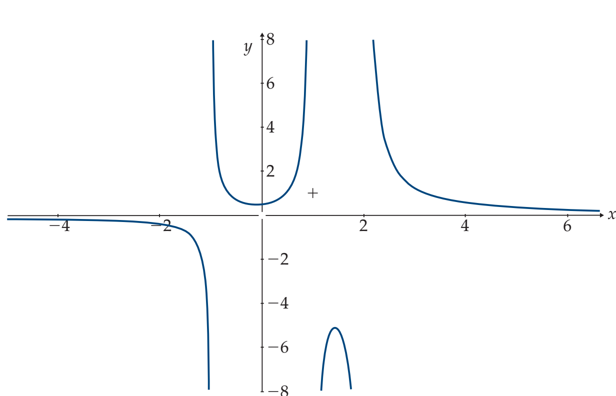
Entonces, tenemos

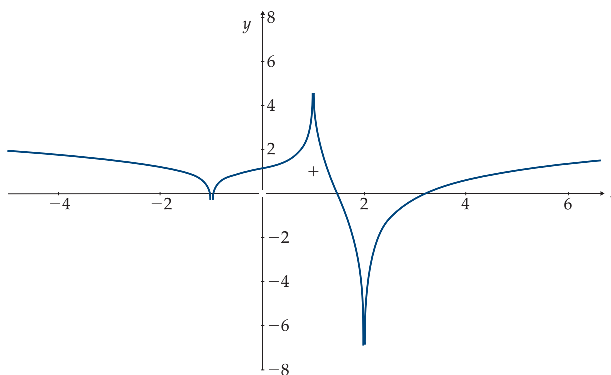
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}dx &= -\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{5}{3}}{x-2}dx \\ &= -\log|x-1| + \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{5}{3}\log|x-2| + c. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}dx = \log\left|\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{5}{3}}}{x-1}\right| + c.$$

Recordemos que la relación anterior nos dice que la derivada de la función $\log\left|\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{5}{3}}}{x-1}\right|$ es la función racional $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$. En la figura siguiente se ilustran las gráficas de ambas funciones.




$$y = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x-2)} \qquad\qquad y = \log\left|\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{5}{3}}}{x-1}\right|$$

## Ejemplo 27

Calcular la integral

$$\int \frac{x^3-2x^2+1}{x^3(x+2)^2(x-3)}dx.$$

Del desarrollo obtenido en un ejemplo anterior

$$\frac{x^3-2x^2+1}{x^3(x+2)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\frac{x^3-2x^2+1}{x^3(x+2)^2(x-3)} = \frac{\frac{53}{432}}{x} + \frac{\frac{1}{18}}{x^2} - \frac{\frac{1}{12}}{x^3} - \frac{\frac{11}{80}}{x+2} - \frac{\frac{3}{8}}{(x+2)^2} + \frac{\frac{2}{135}}{x-3}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-2x^2+1}{x^3(x+2)^2(x-3)}dx &= \int \frac{\frac{53}{432}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{18}}{x^2}dx - \int \frac{\frac{1}{12}}{x^3}dx - \int \frac{\frac{11}{80}}{x+2}dx - \int \frac{\frac{3}{8}}{(x+2)^2}dx + \int \frac{\frac{2}{135}}{x-3}dx \\ &= \frac{53}{432}\log|x| - \frac{1}{18}\frac{1}{x} + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2} - \frac{11}{80}\log|x+2| - \frac{3}{8}(-1)\frac{1}{x+2} \\ &+ \frac{2}{135}\log|x-3|.\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3(x+2)^2(x-3)}dx = -\frac{1}{18}\frac{1}{x} - \frac{1}{24}\frac{1}{x^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x+2} + \frac{53}{432}\log|x| - \frac{11}{80}\log|x+2| + \frac{2}{135}\log|x-3|.$$

**Ejemplo 28**

Calculemos la integral

$$\int \frac{x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 17x^2 + 22x + 20}{(x-1)^2(x^2+4)^2}dx.$$

En un ejemplo anterior obtuvimos la descomposición en fracciones parciales,

$$\frac{x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 17x^2 + 22x + 20}{(x-1)^2(x^2+4)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{-x+1}{x^2+4} + \frac{2x}{(x^2+4)^2}$$

de este desarrollo tenemos

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 17x^2 + 22x + 20}{(x-1)^2(x^2+4)^2}dx \\
&= \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{-x+1}{x^2+4}dx + \int \frac{2x}{(x^2+4)^2}dx \\
&= \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx - \int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx + \int \frac{2x}{(x^2+4)^2}dx \\
&= 2\log|x-1| + 3(-1)\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\log(x^2+4) + \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} + (-1)\frac{1}{x^2+4} \\
&= -\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+4} + 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+4) + \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} \\
&= -\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+4} + \log\left|\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+4}}\right| + \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

# 3.12 Sustitución trigonométrica

Un método muy popular está relacionado con integrales de expresiones que son funciones simples de los radicales $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ y $\sqrt{x^2 + a^2}$.

De nuestras fórmulas de derivación, obtuvimos la integral inmediata

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}(x) + c.$$

Ahora, calculemos la integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

En este caso, hagamos $x = \operatorname{sen}\theta$. Entonces, tenemos $x'(\theta) = \cos\theta$, por tanto

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2}\,dx &= \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\, d\theta \\ &= \int \cos\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= \int \cos^2\theta\, d\theta.\end{aligned}$$

Ahora, hagamos la sustitución trigonométrica

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2}\,dx &= \int \cos^2\theta\, d\theta \\ &= \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\ &= \int \frac{1}{2}\, d\theta + \int \frac{\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + c.\end{aligned}$$

Puesto que $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, $\theta = \operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{sen}\theta = x$ y $\cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$ finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1 - x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta \\ &= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + c.\end{aligned}$$

Procediendo de manera similar, podemos recuperar la integral inmediata

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x.$$

En este caso, tenemos $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta.$

Es decir

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \theta + c.$$

O sea

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c\ .$$

Se deja como ejercicio para el lector hacer los ajustes necesarios para establecer las fórmulas más generales.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

y

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

Para integrar expresiones que dependen del radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, por ejemplo las anteriores u otras más complejas como

$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3} dx = \int \frac{1}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

se sugiere hacer esencialmente el mismo cambio de variable que hicimos en el segundo caso, es decir

$$x = a \operatorname{sen}\theta.$$

En lo que sigue, suponemos $a > 0$. Esto no es ninguna restricción, pues en la integral aparece $a^2$. Con esto, tenemos $x'(\theta) = a \cos \theta$, además

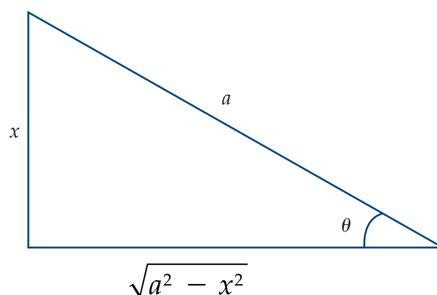
$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a \cos \theta \end{aligned}$$

y

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{a \cos \theta} = \tan \theta$$

en donde suponemos $a > 0$.

Las relaciones anteriores pueden recordarse fácilmente mediante el triángulo clásico.




Con este cambio de variable, una integral de la forma $\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx$, se transforma en

$$\int f(a \cos \theta) a \cos \theta d\theta.$$

En algunos casos, estas integrales pueden calcularse de manera más fácil que la original.

### Ejemplo 29

Para la integral $\int \frac{1}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{1}{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3} dx \\ &= \int \frac{1}{a^3 \cos^3 \theta} a \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{a^2} \int \sec^2 \theta d\theta.\end{aligned}$$

Pero, la última de las integrales es inmediata

$$\int \sec^2 \theta d\theta = \tan\theta + c,$$

por tanto, tenemos

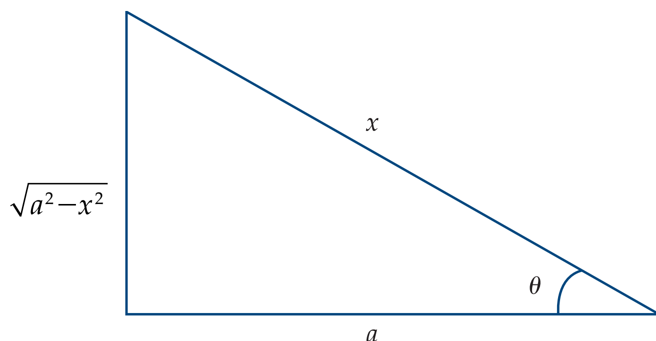
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx &= \frac{1}{a^2} \int \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{a^2} \tan \theta + c \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + c.\end{aligned}$$

Ahora, calculemos algunas integrales que contengan el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, en donde suponemos a $> 0$; esto incluye el caso particular $\sqrt{x^2 - 1}$.

Consideremos la integral

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

Aquí vamos a hacer un cambio de variable y estableceremos algunas relaciones que utilizaremos en la sustitución, las cuales pueden recordarse fácilmente mediante el triángulo rectángulo que se muestra en la siguiente figura.



Hagamos $x = a \sec\theta$; entonces, tenemos

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \tan\theta$$
$$\frac{a}{x} = \cos\theta$$
$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \operatorname{sen}\theta$$

También tenemos $dx = a \sec\theta \tan\theta d\theta$; sustituyendo estas relaciones en la integral propuesta obtenemos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= \int a\tan\theta \cdot a\sec\theta\tan\theta d\theta \\ &= a^2\int \tan^2\theta\sec\theta d\theta.\end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$, la cual se deduce con facilidad de la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, escribimos

$$\int \sec\theta\tan^2\theta d\theta = \int (\sec\theta)(\sec^2\theta - 1)d\theta = \int \sec^3\theta d\theta - \int \sec\theta d\theta.$$

Así que

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = a^2\int \sec^3\theta d\theta - a^2\int \sec\theta d\theta.$$

Como se vio, en el ejemplo 9 mostramos que

$$\int \sec\theta d\theta = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right|.$$

En tanto, en el ejemplo 19 obtuvimos

$$\int \sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \frac{1}{2}\log\left|\sec\theta + \tan\theta\right|.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= a^2\int \sec^3\theta d\theta - a^2\int \sec\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}a^2\sec\theta\tan\theta\frac{1}{2}a^2\log\left|\sec\theta+\tan\theta\right| - a^2\log\left|\sec\theta+\tan\theta\right. \\ &= \frac{1}{2}a^2\sec\theta\tan\theta - \frac{1}{2}a^2\log\left|\sec\theta+\tan\theta\right|.\end{aligned}$$

Al sustituir, de nueva cuenta, las relaciones $x = a\sec\theta$ y $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$, obtenemos

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\log\left|\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a}\right.$$

Como $\log\left|\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2})\right| = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \log a$, y $a$ es una constante positiva, $\log a$ es una constante, así que podemos incorporar esta a la constante de integración para finalmente escribir

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\log\left|(x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c.$$

En particular, cuando $a = 1$ tenemos

$$\int \sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left|(x+\sqrt{x^2-1}\right| + c.$$

Ahora, consideremos la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx.$$

Aun cuando usaremos el mismo cambio de variable, el cálculo de esta integral resultará mucho más simple. Así, al sustituir las relaciones $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$ y $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$ obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta.$$

Por tanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right|.$$

De nueva cuenta, al sustituir, tenemos

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \tan\theta$$
$$\frac{x}{a} = \sec\theta.$$

Por tanto, obtenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \log a.$$

De donde, por último, podemos escribir

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c.$$

Nótese que hemos incorporado la constante $-\log a$ a la constante de integración $c$.

Como caso particular tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c.$$

## 3.13 Integración de funciones racionales en sen $\theta$ y cos $\theta$

Terminamos este capítulo con algunas técnicas generales para calcular integrales de la forma

$$\int R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)d\theta.$$

donde $R(u, v)$ es una función racional de dos variables, es decir, un cociente de polinomios en dos variables. Ejemplos de este tipo de integrales, son

$$\int \frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta\ , \int \frac{1}{2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta}d\theta \ \text{ y } \int \tan\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}d\theta.$$

Para este tipo de integrales, el siguiente cambio de variable es muy socorrido

$$z = \tan\frac{\theta}{2}.$$

De esta relación, se desprende lo siguiente

$$\frac{\theta}{2} = \arctan z, \text{ o sea } \theta = 2\arctan z.$$

De las fórmulas para el seno y coseno de la mitad de un ángulo, se tiene

$$z^2 = \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

Al despejar $\cos\theta$, se tiene

$$\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

De la relación $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\theta &= 1-\cos^2\theta\\ &= 1-\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2\\ &= \frac{\left(1+z^2\right)^2-\left(1-z^2\right)^2}{\left(1+z^2\right)^2}\\ &= \frac{4z^2}{\left(1+z^2\right)^2}\end{aligned}$$

de donde tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2z}{1+z^2}.$$

Finalmente, de la relación $\theta = 2\arctan z$, obtenemos

$$\theta'(z) = 2\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{2}{1+z^2}.$$

En resumen, tenemos el siguiente cambio de variable y todas las relaciones que implica

| |
|---|
| $z = \tan\frac{\theta}{2}$ |
| $\theta = 2\arctan z, \ \theta'(z) = \frac{2}{1+z^2}$ |
| $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ |
| $\operatorname{sen}\theta = \frac{2z}{1+z^2}$ |

Si sustituimos este cambio de variable en la integral $\int R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$, resulta

$$\int R\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2}{1+z^2}\, dz$$

La integral del miembro derecho es la de una función racional en $z$, la cual estudiamos en la sección anterior.

**Nota**

Observe que de paso hemos obtenido fórmulas para calcular sen $\theta$, cos $\theta$ y tan $\theta$, cuando se conoce $\tan\frac{\theta}{2}$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

**Ejemplo 30**

Calculemos la integral

$$\int \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

Haciendo el cambio de variable $z = \tan\frac{\theta}{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{2+\cos\theta} &= \int \frac{1}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{2}{1+z^2}dz \\ &= \int \frac{1}{\frac{2+2z^2+1-z^2}{1+z^2}}\cdot\frac{2}{1+z^2}dz \\ &= \int \frac{2}{z^2+3}dz.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{d\theta}{2+\cos\theta} &= \int \frac{2}{z^2+3}dz \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2}dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}z + c.\end{aligned}$$

De donde, finalmente, obtenemos

$$\int \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right).$$

**Ejemplo 31**

Haciendo el cambio de variable $z = \tan\dfrac{\theta}{2}$ en la integral $\displaystyle\int \frac{1}{2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta}d\theta$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta}d\theta &= \int \frac{1}{2\dfrac{1-z^2}{1+z^2} + 3\dfrac{2z}{1+z^2}}\frac{2}{1+z^2}dz \\
&= 2\int \frac{1}{2(1-z^2)+6z}dz \\
&= -\int \frac{1}{z^2-3z-1}dz.
\end{aligned}$$

Para calcular esta última integral, factorizamos el polinomio cuadrático $z^2 - 3z - 1$ y lo descomponemos en fracciones parciales, con lo que resulta

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{z^2-3z-1}dz &= \int \frac{1}{\left(z-\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(z-\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)}dzdz \\
&= \int \left[\frac{\dfrac{\sqrt{13}}{13}}{z-\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}} - \frac{\dfrac{\sqrt{13}}{13}}{z-\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}}\right]dz \\
&= \frac{\sqrt{13}}{13}\int \frac{1}{z-\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}dz - \frac{\sqrt{13}}{13}\int \frac{1}{z-\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}}dz \\
&= \frac{\sqrt{13}}{13}\log\left|z-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| - \frac{\sqrt{13}}{13}\log\left|z-\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right| \\
&= \frac{\sqrt{13}}{13}\log\left|\frac{z-\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}{z-\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}}\right|.
\end{aligned}$$

O sea

$$\int \frac{1}{z^2-3z-1}dz = \frac{\sqrt{13}}{13}\log\left|\frac{2z-3-\sqrt{13}}{2z-3+\sqrt{13}}\right|.$$

Esta última integral, en términos de $\theta$, se escribe

$$\int \frac{1}{z^2 - 3z - 1} dz = \frac{\sqrt{13}}{13} \log \left| \frac{2\tan\frac{\theta}{2} - 3 - \sqrt{13}}{2\tan\frac{\theta}{2} - 3 + \sqrt{13}} \right|$$

Así que, finalmente, tenemos

$$\int \frac{1}{2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta} d\theta = -\frac{\sqrt{13}}{13} \log \left| \frac{2\tan\frac{\theta}{2} - 3 - \sqrt{13}}{2\tan\frac{\theta}{2} - 3 + \sqrt{13}} \right|.$$

# 3.14 Integrales indefinidas no elementales y construcción artesanal de integrales indefinidas

## 3.14.1 Integrales indefinidas no elementales

En la sección 2.9 ya hemos hablado de la imposibilidad de hallar una primitiva de $e^{-x^2}$ que sea una función elemental. Recordemos que una función $f(x)$ es elemental si esta se puede expresar como una combinación de funciones mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división o extracción de raíces, así como con la composición de funciones aplicadas en cualquier número y en cualquier orden a las funciones polinomiales, racionales, algebraicas, exponenciales, logaritmos, trigonométricas y funciones arco. Las funciones elementales son las que por lo común se utilizan en cálculo, aunque en esta disciplina también se trabaja con algunas funciones no elementales. Así pues, la función $f(x)= e^{-x^2}$ es elemental, ya que está construida con las reglas antes expuestas. Sin embargo, es interesante destacar el hecho de que no existe una función elemental $F(x)$ que sea la primitiva de $f(x)= e^{-x^2}$; es decir, que satisfaga $F'(x)= e^{-x^2}$. Pero, esto no quiere decir que no haya una función $F(x)$ que cumpla la relación anterior, ciertamente existe pero esta no es elemental; es decir, no es posible construirla con las reglas antes expuestas. Una función $F(x)$ que es primitiva de $f(x)= e^{-x^2}$ es la dada por el teorema fundamental del cálculo

$$F(x)=\int_0^x e^{-u^2} du.$$

Como se puede observar, esta función cumple $F'(x)= e^{-x^2}$ para todo real $x$; pero, como ya se dijo antes, esta es no elemental. Por tanto, aquí surge una pregunta natural: ¿cómo sabemos que no es elemental? La respuesta la debemos al matemático francés del siglo XIX, Joseph Liouville (1809-1882), quien en 1835 publicó un trabajo donde prueba que ciertas integrales indefinidas no son funciones elementales. Por supuesto, para hacer una prueba de este tipo Liouville antes tuvo que precisar qué es una función elemental, lo cual hasta entonces no se había hecho. En términos simples, la definición de función elemental es la que acabamos de describir antes.

Podemos probar que la integral indefinida $\int e^{-x^2} dx$ no es elemental si nos apoyamos en un resultado de Liouville de apariencia simple, que es muy razonable. El resultado de Liouville es el siguiente.

### Teorema (de Liouville)

Sean $R_1(x)$ y $R(x)$ dos funciones racionales. Si la integral indefinida $\int R_1(x) e^{R(x)} dx$ es elemental, entonces es de la misma forma que el integrando; es decir, existe una función racional $S(x)$ tal que

$$\int R_1(x)e^{R(x)}dx = S(x)e^{R(x)}.$$

Si tenemos un poco de experiencia en derivación, sin duda sabremos que la exponencial $e^x$ es la única función cuya derivada es esta misma, excepto por factores constantes. En efecto, si $f(x) = ke^x$, entonces $f'(x) = f(x)$. Asimismo, también sabremos que la derivada de cualquier función de la forma general $e^{u(x)}$ contiene a esta misma como factor; es decir, si $f(x) = e^{u(x)}$, entonces $f'(x) = f(x)\, u'(x) = e^{u(x)}\, u'(x)$. Por otra parte, si $f(x) = F\,(e^{u(x)})$ donde $F(x)$ es una función derivable, entonces $f'(x) = F'\,(e^{u(x)})\; e^{u(x)}\; u'(x)$, de modo que en ningún caso es posible deshacernos de la exponencial en el proceso de derivación. La exponencial sobrevive a todos los embates de la derivación, excepto en casos triviales que se generan con igualdades de la forma $v(x) = e^{\log v(x)}$; por ejemplo, $x^2 = e^{\log x^2}$. Después de esta reflexión quizá nos sea más fácil convencernos de la veracidad del teorema de Liouville, o al menos nos ayudará a comprenderlo y asimilarlo. En palabras simples y un tanto folclóricas, podemos razonar así: si tengo una función $F(x)$ (de esas que derivo a diario) tal que al derivarla obtengo $R_1(x)e^{R_2(x)}$, ¿no será que la función que estoy derivando es de la misma forma? En cierto sentido Liouville responde de manera afirmativa a esta pregunta, siempre y cuando la función que estamos derivando sea elemental.

Si damos por cierto el Teorema de Liouville, entonces podemos probar que la integral indefinida $\int e^{-x^2}dx$ no es elemental. Procedamos, pues, con el enunciado y la demostración.

### Teorema

La integral indefinida $\int e^{-x^2}dx$ es no elemental.

### Demostración

Vamos a proceder por contradicción. Supóngase que la integral fuese elemental, entonces por el teorema de Liouville sería de la forma

$$\int e^{-x^2}dx = S(x)e^{-x^2}.$$

Donde $S(x)$ es una función racional. Además, supongamos que $S(x)$ la escribimos en la forma $S(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios que no tienen factores en común, o dicho de otra manera, no tienen raíces en común. Entonces, tenemos

$$e^{-x^2} = \left(S(x)e^{-x^2}\right).$$

O sea

$$e^{-x^2} = S(x)(-2x)e^{-x^2} + S'(x)e^{-x^2}.$$

De donde

$$1 = -2xS(x) + S'(x).$$

Como $S(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, entonces tenemos

$$1 = -2x\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{q(x)p'(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

Ahora, multipliquemos ambos miembros por $q^2(x)$

$$q^2(x) = -2xp(x)q(x) + q(x)p'(x) - p(x)q'(x).$$

De aquí tenemos

$$q^2(x) + 2xp(x)q(x) - q(x)p'(x) = -p(x)q'(x).$$

Que también escribimos

$$p(x)q'(x) = q(x)\left(-q(x) - 2xp(x) + p'(x)\right).$$

A partir de aquí vamos a deducir que el polinomio $q(x)$ tiene que ser una constante, ya que si no fuese un polinomio constante, entonces este tendría al menos una raíz (los únicos polinomios que no tienen raíces son los constantes diferentes de cero). Por tanto, si $r$ es una raíz de $q(x)$ de multiplicidad $m$, entonces $r$ es una raíz de la derivada $q'(x)$ de multiplicidad $m-1$. Entonces, si factorizamos $(x - r)^m$ de $q(x)$ tenemos $q(x) = (x - r)^m Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio que ya no se anula en $r$. Por otra parte, sabemos que $r$ tiene que ser una raíz de multiplicidad $m-1$ de $q'(x)$; por ende, este polinomio se escribe en la forma $q'(x) = (x - r)^{m-1} T(x)$, donde $T(x)$ es un polinomio que no se anula en $r$. Al sustituir estas factorizaciones, tenemos

$$p(x)q'(x) = q(x)\left(-q(x) - 2xp(x) + p'(x)\right)$$
$$p(x)(x-r)^{m-1} T(x) = (x-r)^m Q(x)\left(-q(x) - 2xp(x) + p'(x)\right).$$

Al simplificar esta expresión obtenemos

$$p(x)T(x) = (x-r)Q(x)\left(-q(x) - 2xp(x) + p'(x)\right).$$

Como podemos ver, esta relación es imposible: el miembro derecho se anula en $x = r$, pero el miembro izquierdo es diferente de cero en $x = r$, pues ni $T(x)$ ni $p(x)$ se anulan en este punto (recordemos que $p(x)$ y $q(x)$ no tienen raíces en común). De esta imposibilidad, deducimos que $q(x)$ no puede tener raíces, así que $q(x)$ tiene que ser un polinomio constante. Esto significa que la función $S(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ en realidad es un polinomio, que seguiremos llamando $p(x)$. Entonces, si $\int e^{-x^2}dx$ fuese elemental se debería tener

$$\int e^{-x^2}dx = p(x)e^{-x^2}.$$

Donde $p(x)$ es un polinomio. Ya sea que derivemos de nueva cuenta el miembro derecho o usemos la derivación que hicimos para el caso de la función $S(x)$, obtenemos de la igualdad anterior

$$1 = -2xp(x) + p'(x).$$

O sea

$$2xp(x) = p'(x) - 1.$$

Como se observa, esta es una identidad de polinomios que es imposible, pues el grado del polinomio $2xp(x)$ es una unidad más que el grado de $p(x)$ y el grado de $p'(x)-1$ es una unidad menos. Son polinomios de grados diferentes, por lo que no pueden ser iguales. Esto prueba que la integral indefinida $\int e^{-x^2}dx$ no puede ser una función elemental, al mismo tiempo que también prueba el teorema.

Con las mismas técnicas, también podemos demostrar que las integrales $\int \frac{e^x}{x}dx$ y $\int \frac{e^{-x}}{x}dx = \int \frac{1}{xe^x}dx$ no son elementales. De hecho, para todo real $a \neq 0$, la integral indefinida $\int \frac{e^{a^x}}{x}dx$ es no elemental. El resultado lo establecemos en el siguiente teorema.

### Teorema

La integral $\int \frac{e^x}{x}dx$ es no elemental.

### Demostración

Como en el teorema anterior, aquí también aplicamos el teorema de Liouville y procedemos por contradicción. Supongamos que la integral es elemental. Entonces, por el teorema de Liouville existe una función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios sin raíces comunes, tal que

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \frac{p(x)}{q(x)}e^x.$$

Esto significa que

$$\frac{e^x}{x} = \left(\frac{p(x)}{q(x)}e^x\right).$$

Calculando la derivada, tenemos

$$\frac{e^x}{x} = \frac{p(x)}{q(x)}e^x + \frac{q(x)p'(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}e^x.$$

Cancelando $e^x$, obtenemos

$$\frac{1}{x} = \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{q(x)p'(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

Por tanto

$$q^2(x) = xp(x)q(x) + xq(x)p'(x) - xp(x)q'(x).$$

De aquí escribimos

$$-q^2(x) + xp(x)q(x) + xq(x)p'(x) = xp(x)q'(x).$$

O sea

$$q(x)\left(-q(x) + xp(x) + xp'(x)\right) = xp(x)q'(x).$$

De manera análoga a la prueba del teorema anterior, concluimos que $q(x)$ tiene que ser una constante. Supóngase que $q(x)$ no es constante, entonces tiene alguna raíz $r$. Si la multiplicidad de esta raíz es $m$, entonces $r$ es una raíz de $q'(x)$ de multiplicidad $m-1$. Así, al dividir ambos miembros por $(x-r)^{m-1}$, obtenemos

$$(x-r)T(x)(-q(x)+xp(x)+xp'(x))=xp(x)S(x) \qquad (*)$$

donde $T(x)$ y $S(x)$ son polinomios que no se anulan en $x = r$. Si $r = 0$, la igualdad (*) queda

$$xT(x)(-q(x)+xp(x)+xp'(x))=xp(x)S(x).$$

O sea

$$T(x)(-q(x)+xp(x)+xp'(x))=p(x)S(x).$$

Pero esto no es posible, pues el miembro izquierdo se anula en $x = 0$, debido a que el polinomio entre paréntesis se anula en este punto; sin embargo, el miembro derecho es diferente de cero en $x = 0$, así que esto no es posible. Si $r \neq 0$, el miembro izquierdo de la igualdad (*) se anula $x = r$ y el miembro derecho es diferente de cero, ya que por hipótesis $r$ no puede ser raíz de $p(x)$. Entonces, $q(x)$ no puede tener raíces, lo cual implica que $q(x)$ debe ser una constante. Esto significa que la integral $\int \frac{e^x}{x}dx$ es de la forma

$$\int \frac{e^x}{x}dx = p(x)e^x.$$

Lo cual nos lleva a la relación

$$1=xp(x)+xp'(x).$$

O sea

$$xp(x)=1-xp'(x).$$

Pero esta igualdad es imposible, pues el miembro izquierdo es un polinomio de grado una unidad mayor que el grado de $p(x)$ y el grado del miembro derecho es igual al de $p(x)$. Esto implica que no existe tal función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ que satisfaga

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \frac{p(x)}{q(x)}e^x$$

lo que tendría que ocurrir si la integral fuese elemental. Entonces, podemos concluir que la integral $\int \frac{e^x}{x}dx$ es no elemental. Esto prueba el teorema.

De lo anterior se prueba fácilmente que la integral $\int \frac{e^{ax}}{x}dx$ es no elemental para todo $a \neq 0$. Esto se sigue del cambio de variable $u = ax$, pues tenemos

$$\int \frac{e^{ax}}{x}dx=\int \frac{e^{ax}}{ax}adx=\int \frac{e^u}{u}du.$$

Es importante destacar que de los teoremas anteriores se desprenden otros resultados. Así que ahora analizamos algunas integrales que guardan cierta similitud; algunas de estas son elementales pero otras, a pesar de su parecido, no lo son.

Ya hemos probado que la integral indefinida $\int e^{-x^2}dx=\int \frac{1}{e^{x^2}}dx$ es no elemental. Así, de manera totalmente similar, se prueba que la integral $\int e^{x^2}dx$ es no elemental. Por otra parte, la integral $\int xe^{x^2}dx$ trivialmente es elemental, pues

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

Ahora, consideremos la integral $\int x^2e^{x^2}dx$. Integrando por partes con $u = x$ y $dv = xe^{x^2}dx$, obtenemos

$$\int x^2e^{x^2}dx = \frac{1}{2}xe^{x^2} - \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx.$$

Dado que la integral $\int e^{x^2}dx$ es no elemental, se sigue que $\int x^2e^{x^2}dx$ también es no elemental. Se deja como ejercicio al lector que pruebe, usando inducción matemática, que las integrales $\int x^{2n-1}e^{x^2}dx$ son elementales y que las integrales $\int x^{2n}e^{x^2}dx$ son no elementales para todo natural $n$.

Ahora, consideremos la integral

$$\int e^x\sqrt{x}\,dx$$

y mostremos que esta integral es no elemental. Para ello, hagamos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$. Entonces, tenemos: $u^2 = x$ y $2udu = dx$. Por tanto

$$\int e^x\sqrt{x}dx = \int e^{u^2}u\cdot 2udu = 2\int e^{u^2}u^2du.$$

Como $\int e^{u^2}u^2du$ es no elemental, se sigue que $\int e^x\sqrt{x}\,dx$ es no elemental. El mismo cambio de variable aplicado a la integral $\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ nos lleva a

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^{u^2}}{u}2udu = 2\int e^{u^2}du.$$

Como la integral $\int e^{u^2}du$ es no elemental se sigue que la integral $\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ es no elemental.

Ahora, analicemos algunas integrales que hemos construido con la función logaritmo natural, las cuales listamos a continuación a fin de poder compararlas con facilidad; es importante resaltar que algunas de estas ya las hemos estudiado en secciones anteriores, no obstante nos servirán de referencia.

*a*) $\int \log x dx$

*b*) $\int \frac{1}{\log x}dx$

*c*) $\int \frac{\log x}{x}dx$

*d*) $\int \frac{x}{\log x}dx$

*e*) $\int x\log x dx$

*f*) $\int \frac{1}{x\log x}dx$

En una sección anterior obtuvimos $\int \log x dx = x(\log x - 1)$; por tanto, es elemental.

Por otra parte, si para la integral $\int \frac{1}{\log x}dx$ hacemos el cambio de variable $u = \log x$, tenemos $x = e^u$ y $dx = e^u\,du$. Por ende

$$\int \frac{1}{\log x}dx = \int \frac{e^u}{u}du\ .$$

De esta relación se sigue que la integral $\int \frac{1}{\log x}dx$ es no elemental, pues sabemos que $\int \frac{e^u}{u}du$ es no elemental.

Para la integral $\int \frac{\log x}{x}dx$ basta hacer el cambio de variable $u = \log x$, para obtener

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int udu = \frac{1}{2}u^2.$$

O sea

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}\log^2 x.$$

Por tanto, $\int \frac{\log x}{x}dx$ sí es elemental.

Ahora, consideremos la integral $\int \frac{x}{\log x}dx$. Si hacemos el cambio de variable $u = \log x$, obtenemos

$$\int \frac{x}{\log x}dx = \int \frac{e^u}{u}e^u du = \int \frac{e^{2u}}{u}du.$$

Como $\int \frac{e^{2u}}{u}du$ es no elemental, se sigue que la integral $\int \frac{x}{\log x}dx$ es no elemental.

Ahora, consideremos las integrales $\int x \log xdx$ y $\int \frac{1}{x\log x}dx$. Para la primera de estas integramos por partes haciendo $u = \log x$ y $dv = xdx$; entonces, tenemos $x = e^u$, $dx = e^u du$ y $v=\frac{1}{2}x^2$. Entonces

$$\int x\log xdx = \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2.$$

Por tanto, la integral $\int x \log xdx$ es elemental, ya que

$$\int x\log xdx = \frac{1}{4}x^2 (\log x - 1)$$

Por último, la integral $\int \frac{1}{x\log x}dx$ es elemental, pues mediante el cambio de variable $u = \log x$ obtenemos

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx = \int \frac{du}{u} = \log|u|.$$

Es decir

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \log|\log x|.$$

A manera de resumen, enseguida presentamos en una tabla las integrales anteriores, indicando cuáles son elementales y cuáles no.

| Integral $\int f(x)\,dx$ | Elemental | No elemental |
|---|---|---|
| $\int e^{x^2} dx$ | | XXX |
| $\int e^{-x^2} dx = \int \frac{1}{e^{x^2}} dx$ | | XXX |
| $\int x e^{x^2} dx$ | XXX | |
| $\int x^2 e^{x^2} dx$ | | XXX |
| $\int \frac{e^x}{x} dx$ | | XXX |
| $\int \frac{e^{-x}}{x} dx = \int \frac{1}{xe^x} dx$ | | XXX |
| $\int e^x \sqrt{xdx}$ | | XXX |
| $\int \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ | | XXX |
| $\int \log xdx$ | XXX | |
| $\int \frac{1}{\log x} dx$ | | XXX |
| $\int \frac{\log x}{x} dx$ | XXX | |
| $\int \frac{x}{\log x} dx$ | | XXX |
| $\int x\log xdx$ | XXX | |
| $\int \frac{1}{x \log x} dx$ | XXX | |

## 3.14.2 Construcción artesanal de integrales indefinidas

Por definición, *una* integral indefinida de una función dada es cualquier primitiva y *la* integral indefinida de $f(x)$ es la familia de primitivas de $f(x)$. Cuando escribimos el símbolo

$$\int f(x)dx = F(x)$$

queremos decir que la función $F(x)$ es una integral indefinida; es decir, que esta satisface $F'(x) = f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f(x)$. Quizá piense que para probar una igualdad $\int f(x)dx = F(x)$ es suficiente derivar la función $F(x)$ y verificar la condición $F'(x) = f(x)$; sin embargo, no debemos olvidar que la igualdad debe verificarse para todos los puntos donde esté definida la función $f(x)$. Esto se abordó en la sección 2.9 del capítulo 2.

Por ejemplo las dos funciones

$$F(x)=\frac{1}{4}\arctan\frac{4\operatorname{sen}x}{3+5\cos}$$

y

$$G(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}x}{3+\cos x}\right)$$

satisfacen

$$F'(x)=\frac{1}{5+3\cos x}$$
$$G'(x)=\frac{1}{5+3\cos x}.$$

La primera igualdad se satisface para todos los puntos donde está definida $F(x)$ y la segunda para todos los puntos donde está definida $G(x)$; pero, de estas dos funciones, $G(x)$ es la única que está definida en todos los reales $\mathbb{R}$ que es el dominio de $f(x)=\frac{1}{5+3\cos x}$. Así que $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, pero no así $F(x)$. Entonces, podemos escribir

$$\int\frac{1}{5+3\cos x}dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}x}{3+\cos x}\right).$$

Pero, en términos estrictos, no es correcto escribir

$$\int\frac{1}{5+3\cos x}dx=\frac{1}{4}\arctan\frac{4\operatorname{sen}x}{3+5\cos}.$$

Sirva este ejemplo para alertarnos acerca de que debemos verificar esta propiedad cada vez que apliquemos un método de integración para hallar una primitiva $F(x)$ de una función dada $f(x)$; no es suficiente verificar la condición $F'(x) = f(x)$, debemos verificar que esta igualdad se satisface en todos los puntos del dominio de $f(x)$ o al menos en todos los puntos donde nos interesa que se satisfaga, por ejemplo en un intervalo donde deseemos aplicar el teorema fundamental del cálculo.

El problema de calcular una integral indefinida, es decir, el problema de hallar una primitiva de una función, es mucho más difícil que el problema de hallar la derivada de una función. En teoría, las reglas de derivación y la regla de la cadena nos permiten calcular la derivada de cualquier función elemental, esto es posible debido a la definición de función elemental. Como si la definición de función elemental se hubiese hecho para poder derivarlas todas estas. Pero, hallar la integral indefinida de una función elemental puede ser difícil o aun imposible, como es el caso de algunas de las integrales de la tabla anterior. Ahora, estudiamos algunos ejemplos de funciones en donde no tenemos una técnica específica para hallar una integral indefinida, por lo cual deberemos recurrir a técnicas más artesanales.

## La integral $\int |x|^n\,dx$

Consideremos la función continua $f(x) = |x|$. Tratemos de hallar la integral indefinida

$$\int |x|\,dx$$

Deseamos encontrar una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $F'(x) = |x|$. Un problema más general es hallar la integral indefinida

$$\int |x|^n\,dx$$

para todo natural $n$.

Para el caso de la función $f(x) = |x|$, recordemos la definición de esta función

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & si\ x<0\\ x & si\ x\geq 0\end{cases}$$

Así que para hallar una primitiva de esta función separamos el dominio en los conjuntos abiertos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$; después, le damos un tratamiento especial al punto $x = 0$. Una función cuya derivada es $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ es $-\frac{1}{2}x^2$ y otra cuya derivada es igual a $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$ es $\frac{1}{2}x^2$. Entonces, la derivada de la función $h$ definida como

$$h(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

está dada por

$$h'(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x>0.\end{cases}$$

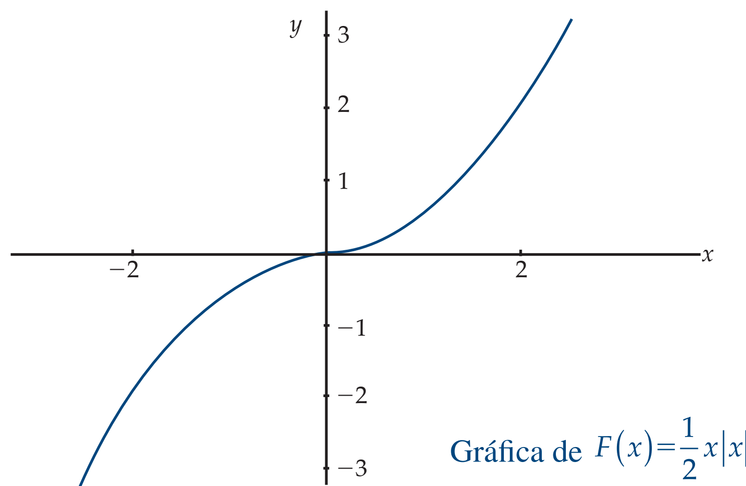
pues se satisface $h'(x) = f(x)$ para todo $x \in (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. Es fácil ver que $h$ se puede extender al cero, con lo cual obtendremos una función derivable en todos los reales; es decir, si definimos

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

(denotamos esta función por $F$, dado que por tener distintos dominios $F$ y $h$ son diferentes) tenemos que $F$ es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ y además $F'(x) = f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $F(x)$ es una primitiva de $f(x) = |x|$. Por cierto, obsérvese que podemos escribir

$$F(x)=\frac{1}{2}x|x|$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Es notable que esta función es derivable en $x = 0$ aun cuando $|x|$ no lo es.



Gráfica de $F(x)=\frac{1}{2}x|x|$

Entonces, tenemos

$$\int |x|\,dx = \frac{1}{2}x|x| + c.$$

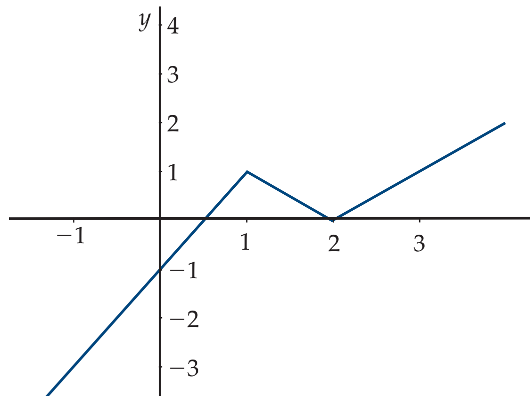
Se deja como ejercicio para el lector que muestre que para todo natural $n$ se tiene

$$\int |x|^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^n|x| + c.$$

Es notable que toda función continua poligonal, es decir, toda función continua que está formada por trozos rectilíneos, tiene una primitiva. Por ejemplo, la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } -\infty < x < 1 \\ -x+2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \le x < 0 \end{cases}$$

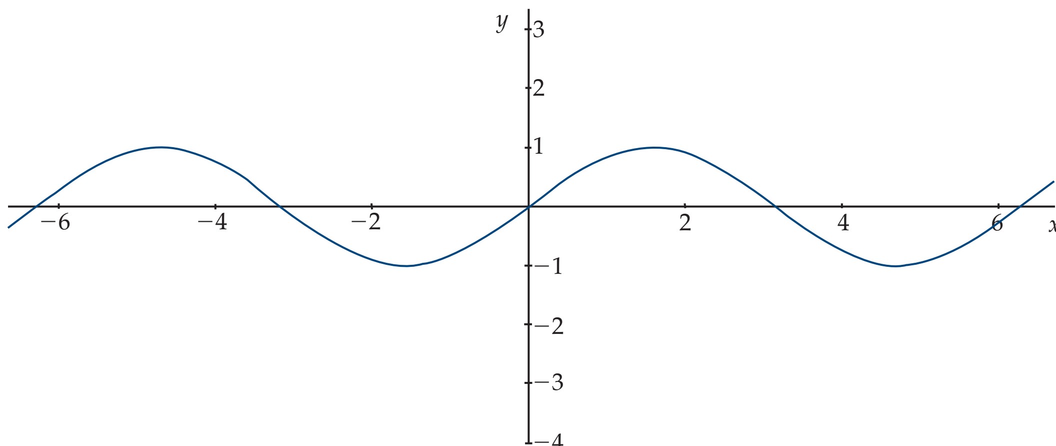
es una función poligonal.




Se deja como ejercicio para el lector hallar una primitiva de $f$.

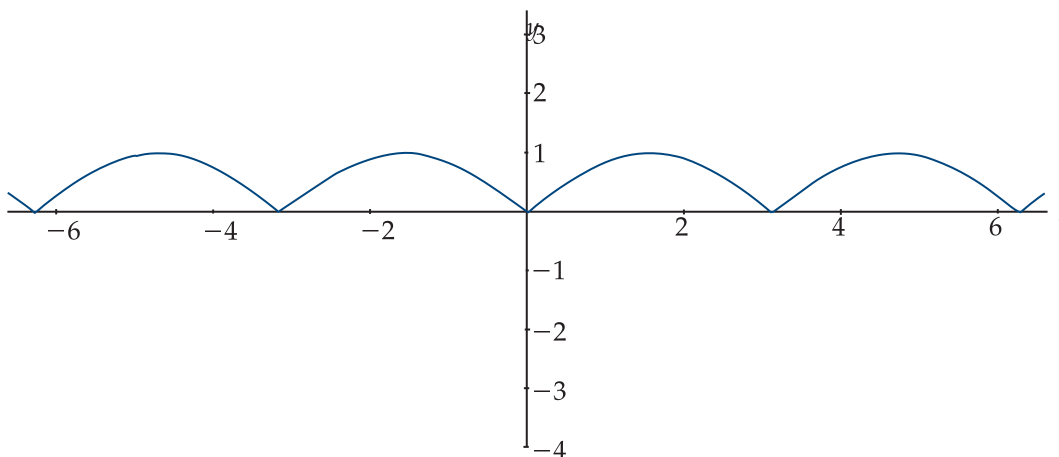
## La integral $\int |\text{sen}\, x|\,dx$

Consideremos ahora la función continua $f(x) = |\text{sen}\, x|$ y tratemos de hallar la integral indefinida. Como en el ejemplo anterior, consideramos los intervalos donde la función sen $x$ es positiva y los intervalos donde es negativa. La figura siguiente muestra algunos de estos intervalos.



En el intervalo $(0, \pi)$ la función sen $x$ es positiva, también lo es en los intervalos $(2\pi, 3\pi)$ y $(-2\pi, -\pi)$. En general, sen $x$ es positiva en todos los intervalos abiertos de la forma $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ para todo entero $n$. Por otra parte, sen $x$ es negativa en todos los intervalos abiertos de la forma $((2n-1)\pi, (2n-1)\pi, 2n\pi)$. Entonces, tenemos

$$f(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } (2n-1)\pi < x \le 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 2n\pi < x < (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$




Gráfica de $f(x)=|\operatorname{sen} x|$

Para iniciar la construcción de una primitiva de $f(x)=|\operatorname{sen} x|$ debemos hallar una primitiva en cada uno de los intervalos abiertos. No obstante, la construcción no estará completa hasta que le hayamos dado un tratamiento a los puntos de la forma $k\pi$. Observe que la función $f(x)=|\operatorname{sen} x|$ es continua en todos los reales, por tanto tiene una primitiva o integral indefinida en todo $\mathbb{R}$.

Para los intervalos abiertos $((2n-1)\pi, 2n\pi)$ y $(2n\pi\,(2n+1)\pi)$ es suficiente establecer como primitiva $H(x) = \cos x$ para toda $x \in ((2n-1)\pi, 2n\pi)$ y $H(x) = -\cos x$ para toda $x \in (2n\pi\,(2n+1)\pi)$, pues $H'(x) = -\operatorname{sen} x$ en el primer caso y $H'(x) = \operatorname{sen} x$ en el segundo. Entonces, tenemos que la función

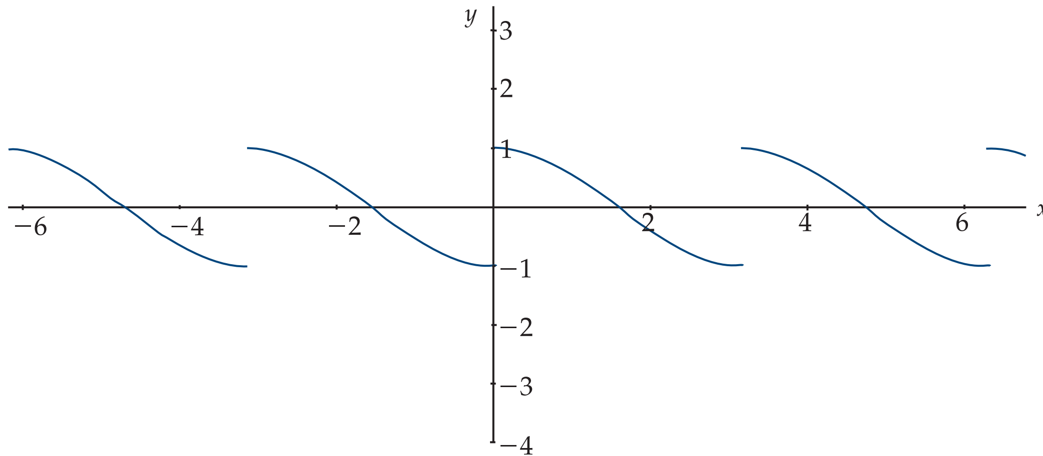
$$H(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } (2n-1)\pi < x < 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \\ -\cos x & \text{si } 2n\pi < x < (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

satisface $H'(x) = |\operatorname{sen} x|$ para todo real $x$ en el dominio de $H(x)$, es decir

$$H'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } (2n-1)\pi < x < 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 2n\pi < x < (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Pero el dominio de $H(x)$ no incluye los puntos de la forma $k\pi$ con $k$ entero, así que debemos extender su definición. La extensión debe producir una función derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada debe ser igual a $|\operatorname{sen} x|$. Para los puntos del dominio de $H(x)$, ya está resuelto el problema, así que ahora debemos darle un tratamiento especial a los puntos de la forma $k\pi$. El problema consiste en determinar los valores adecuados que debemos asignarle a la función

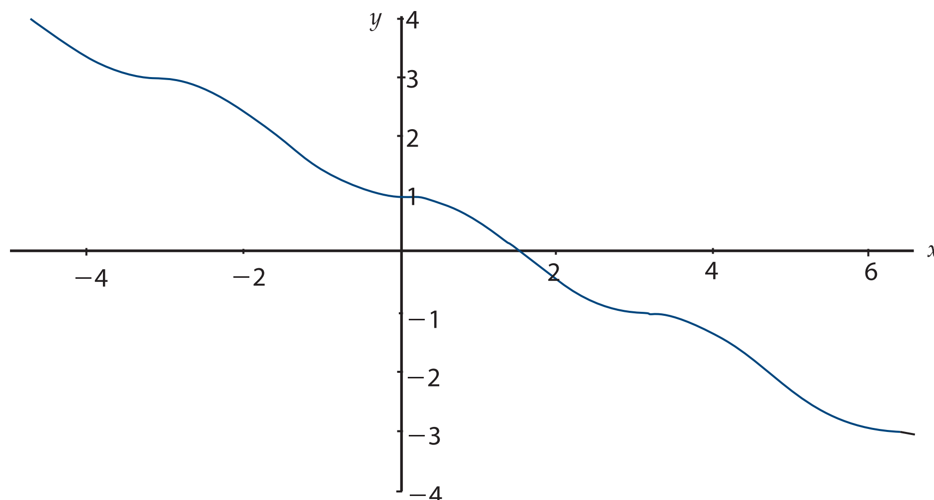
buscada en estos puntos. Para inspirarnos en la búsqueda de estos valores, mostramos la gráfica de $H(x)$.




Observemos que esta función no está definida en los puntos $k\pi$ y que no hay manera de extender su definición de modo que al menos resulte continua (mucho menos derivable) en esos puntos. Sin embargo, podemos trasladar los trozos de la gráfica, de tal modo que podamos definirla en estos puntos y que cuando menos resulte continua. En palabras llanas, podemos trasladar los trozos de manera que obtengamos una curva continua. La situación es todavía más favorable, pues al trasladar los trozos empalmarán "muy bien", es decir, producirán una curva "suave", dándonos la posibilidad de obtener una función derivable. En términos analíticos, estas condiciones se traducen en:

1. Existen ambos límites laterales de $H(x)$ en todos los puntos de la forma $k\pi$. Esto nos posibilita modificar la función de manera que podamos extenderla a una función continua.
2. Existen los límites laterales de la función $H'(x)$ en todos los puntos de la forma $k\pi$. Además, en cada uno de estos puntos, ambos límites laterales son iguales. Esto nos conduce a una función derivable en esos puntos.

A continuación se muestra la gráfica que se obtiene al trasladar simplemente los trozos de curvas:



De la figura anterior resulta claro que al trasladar la función y definiéndola de manera adecuada en esos puntos obtendremos la primitiva buscada. La extensión es, entonces, de la forma

$$F(x)=\begin{cases} \cos x + c_n & \text{si } (2n-1)\pi < x \le 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\ -\cos x + c_n + 2 & \text{si } 2n\pi < x < (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donde las constantes $c_n$ dependen de $n$. Se deja como ejercicio para lector que establezca los valores de $c_n$. Por ejemplo, tenemos $c_1 = 2$, $c_2 = 6$.

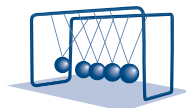
Ya habiendo determinado los valores adecuados de las constantes $c_n$, podemos escribir

$$\int |\text{sen}\, x|\, dx = F(x)$$

Se invita al lector para que ahora obtenga la integral indefinida

$$\int |\cos x|\, dx.$$

## 3.15 Problemas y ejercicios



**I.** Las siguientes integrales son casi inmediatas, para calcularlas se requiere de un cambio de variable simple. Trate de obtener muchas de estas, como un ejercicio de cálculo mental.

**1.** $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$

**2.** $\int \text{sen}(\text{sen}\, x)\cos x dx$

**3.** $\int x e^{x^2}\, dx$

**4.** $\int x^2 e^{-x^3}\, dx$

**5.** $\int \frac{\log x}{x}dx$

**6.** $\int \frac{\log^2 x}{x}dx$

**7.** $\int \frac{1}{x\log x}dx$

**8.** $\int \frac{1}{x(\log x)^n}dx$ ($n$ entero positivo)

**9.** $\int \frac{1}{1+2e^{-x}}\log(e^x+2)dx$

**10.** $\int e^x \,\text{sen}\, e^x\, dx$

**11.** $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

**12.** $\int \frac{e^x}{3e^x+2}dx$

**13.** $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^n}dx$, ($n$ entero positivo)

**14.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$

**15.** $\int \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

**16.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$

**17.** $\int e^{\cos x}\,\text{sen}\, x dx$

**18.** $\int e^{\text{sen}^2 x}\,\text{sen}\, 2x dx$

**19.** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

**20.** $\int e^{e^x}e^x dx$

**21.** $\int \frac{\cos x}{1+\text{sen}^2 x}dx$

22. $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan^2 x} dx$

23. $\int \frac{x^5}{1 + (x^6 + 3)^2} dx$

24. $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

25. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^4 x}} dx$

26. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

27. $\int \frac{\left(\frac{1}{2}x + 1\right)e^{\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1 - x^2 e^x}} dx$

28. $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + 3)^2}} dx$

29. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x}} dx$

30. $\int \frac{(6x - 5)}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}} dx$

**II.** Descomponiendo el integrando en fracciones parciales, calcule las siguientes integrales de funciones racionales.

31. $\int \frac{dx}{x(x - 1)}$

32. $\int \frac{dx}{x(x + 1)}$

33. $\int \frac{dx}{(x + 1)(2x - 3)}$

34. $\int \frac{dx}{(a - x)(b - x)}$

35. $\int \frac{7x - 28x + 24}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} dx$

36. $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$

37. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10}$

38. $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$

39. $\int \frac{dx}{2 - 3x^2}$

40. $\int \frac{2(x^2 - 5)}{(x^2 - 1)(x - 3)} dx$

41. $\int \frac{x^2 + 4x - 8}{(x - 1)(x^2 - 4)} dx$

42. $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

43. $\int \frac{1}{(x^2 + x + 2)^2} dx$

44. $\int \frac{3x^2 + 2x + 7}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$

45. $\int \frac{5x^3 + 9x^2 - 12x - 11}{(x - 1)^2(x + 2)^2} dx$

46. $\int \frac{5x^3 + 47x^2 + 132x + 115}{(x - 4)(x + 3)^3} dx$

47. $\int \frac{x}{(x + 2)^2} dx$

48. $\int \frac{x}{(x + 2)^n} dx$, ($n$ entero positivo)

49. $\int \frac{2x^3 + 18x^2 + 29x + 24}{(x + 3)^2(x^2 + x + 3)} dx$

50. $\int \frac{1}{x^2 + x^4} dx$

51. $\int \frac{6x^2 + 11x + 24}{(x + 3)^2(x^2 + x + 3)} dx$

52. $\int \frac{6x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 7x + 9}{(x + 1)(x^2 + 1)^2} dx$

**III.** Para calcular las siguientes integrales, primero realice la división entre los polinomios para obtener un cociente y un residuo, después descomponga en fracciones parciales.

53. $\int \frac{x}{x + 4} dx$

54. $\int \frac{x}{2x + 1} dx$

55. $\int \frac{x}{k + rx} dx$

56. $\int \frac{3+x}{3-x}dx$

57. $\int \frac{2x-1}{x-2}dx$

58. $\int \frac{x+2}{2x-1}dx$

59. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$

60. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

61. $\int \frac{x^4}{1-x}dx$

62. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

63. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

64. $\int \frac{x^6-3x^5-4x^4+x^2+x-5}{x^2-3x-4}dx$

65. $\int \frac{(x \;\; + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)}{x^2+1}dx$

66. $\int \frac{x^5+x^4+6x^3+2x^2+7x-6}{(x^2+4)(x^2+x+2)}dx$

**IV.** Aplicando el método de integración por partes, calcule las siguientes integrales.

67. $\int xe^{ax}dx$

68. $\int x^2e^{ax}dx$

69. $\int x^3e^{x}dx$

70. $\int xe^{-x}dx$

71. $\int x^2e^{-x}dx$

72. $\int x2^x\,dx$

73. $\int x^2a^xdx$

74. $\int e^{ax}\cos bx dx$

75. $\int e^{x}\operatorname{sen} x dx$

76. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx$

77. $\int e^{3x}(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)dx$

78. $\int x^2e^x \operatorname{sen} x\, dx$

79. $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$

80. $\int \log (x^2+1)dx$

81. $\int x^2\log (1+x)dx$

82. $\int x^n\log x dx, \; (n \neq 1)$

83. $\int \log^2 x dx$

84. $\int \frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

85. $\int x \operatorname{sen} 2x dx$

86. $\int x \cos x dx$

87. $\int x \cos^2 x dx$

88. $\int x \tan^2 x dx$

89. $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$

90. $\int x^2 \cos^2 x dx$

91. $\int x \sec^2 x dx$

92. $\int x \operatorname{sen}^2 3x dx$

93. $\int x^2 \operatorname{sen} ax dx$

94. $\int \operatorname{sen} (\log x)dx$

95. $\int \cos (\log x)dx$

96. $\int \operatorname{arccot} x dx$

97. $\int \operatorname{arcsec} x dx$

98. $\int \operatorname{arccsc} x dx$

99. $\int \arctan \sqrt{x}\sqrt{dx}$

100. $\int x \arctan x dx$

101. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx$

**102.** $\int (\arctan x)^2 dx$

**103.** $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$

**104.** $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

**105.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx$

**106.** $\int \frac{x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} dx$

**107.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

**108.** $\int \frac{\log^3 x}{x^2} dx$

**109.** $\int \frac{\log^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$

**110.** $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x + 1}} dx$

**V.** Calcule las siguientes integrales que contienen un radical de alguna de las formas $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ o $\sqrt{a^2 - x^2}$. Use la sustitución trigonométrica estudiada en el texto, que se apoya en un triángulo rectángulo de hipotenusa $a > 0$ y uno de los catetos $x$ o de hipotenusa $x$ y uno de los catetos $a > 0$. Las sustituciones pueden ser del tipo $x = a \operatorname{sen} \theta$, $x = a \cos \theta$, $x = a \tan \theta$ o $x = a \sec \theta$.

**111.** $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

**112.** $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

**113.** $\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

**114.** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

**115.** $\int \sqrt{1 + x^2}\, dx$

**116.** $\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

**117.** $\int \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$

**118.** $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$

**119.** $\int \frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}} dx$

**120.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

**121.** $\int \frac{1}{\left(x^2 + 2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

**122.** $\int \frac{x^2}{\left(x^2 + 8\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

**123.** $\int \frac{x^2}{\left(9 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

**124.** $\int \frac{1}{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

**125.** $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 7}} dx$

**126.** $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 1}} dx$

**127.** $\int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x} dx$

**128.** $\int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x^2} dx$

**129.** $\int \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{x^6} dx$

**VI.** Integrales de funciones polinomiales en las fun-ciones seno y coseno, $P(\operatorname{sen} x, \cos x)$. En este caso, es suficiente saber integrar funciones de la forma $f(x) = \operatorname{sen}^m x \cos^n x$. Si uno de los dos exponentes es impar, será útil la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Si ambos son exponentes pares, pueden utilizarse las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Calcule las siguientes integrales.

**130.** $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$

**131.** $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$

**132.** $\int \text{sen}\, x \cos^2 x dx$

**133.** $\int \text{sen}\, x \cos^4 x dx$

**134.** $\int \text{sen}^2 x \cos^3 x dx$

**135.** $\int \text{sen}^4 2x \cos^3 2x dx$

**136.** $\int \cos^5 x dx$

**137.** $\int \text{sen}^5 x dx$

**138.** $\int \text{sen}^3 ax \cos^3 ax dx$

**139.** $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$

**140.** $\int \text{sen}^2 x dx$

**141.** $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \text{sen}^2 dx$

**142.** $\int \text{sen}^4 x dx$

**143.** $\int \cos^4 x dx$

**144.** $\int \text{sen}^6 x dx$

**VII.** Integración de funciones racionales en las funciones seno y coseno, $R(\text{sen}\, x, \cos x)$. En este caso, se usa el cambio de variable estudiado en el texto $u = \tan \frac{x}{2}$ .

**145.** $\int \frac{1}{5 + 4 \text{sen}\, 2x} dx$

**146.** $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$

**147.** $\int \frac{1}{3 + \cos x} dx$

**148.** $\int \frac{1}{2 \text{sen}\, x - \cos x + 3} dx$

**149.** $\int \frac{1}{1 + \text{sen}\, x - \cos x} dx$

**150.** $\int \frac{1}{5 - 3 \cos x} dx$

**151.** $\int \frac{1}{5 + 4 \sec x} dx$

**152.** $\int \frac{1}{2 + \text{sen}\, x} dx$

**VIII.**

**153.** Calcule la integral $\int \sec x dx$ mediante la sustitución $u = \tan \frac{x}{2}$. En lugar de obtener el resultado clásico,

$$\int \sec x dx = \log(\sec x = \tan x) = C,$$

obtendrá una forma diferente:

$$\int \sec x dx = \log\left(\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}\right) = \log\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Haciendo un cambio de variable apropiado, calcule las siguientes integrales.

**154.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)}$

**155.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

**156.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} dx$

**157.** $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}}$

**158.** $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}}$

**159.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 - a^2\right)^3}}$

**160.** $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

**161.** $\int \frac{dx}{\left(x^2 + 4\right)\sqrt{4x^2 + 1}}$

**162.** $\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} dx$

**163.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

**164.** $\int \frac{x + 1}{x\left(1 + xe^x\right)} dx$

**165.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(e^x + 1 = 2^4)}}$

**166.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$

**167.** $\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x\log x}dx$

**168.** $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot \operatorname{sen} 2x\cdot \cos 2x dx$

**169.** $\int \frac{\log(\tan x)}{\operatorname{sen} x\cdot \cos x}dx$

**170.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{a^3-x^3}}dx$

**171.** $\int \frac{x^5}{\left(x^2-4\right)^2}dx$

**172.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$

**173.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

**174.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

**175.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ $(x+1=z^2)$

**176.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

**177.** $\int \frac{4x+3}{\left(x-2\right)^3}dx$

**178.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

**179.** $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$

**180.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

**181.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x\left(x+1\right)}dx$

**182.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$

**183.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

**184.** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b+m}}$

**185.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$ $(x=z^6)$

**186.** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$

**187.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

**188.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$

**189.** $\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx$

## Miscelánea de integrales

**190.** $\int \sqrt[5]{2-3\sqrt[3]{x^4}}\,\sqrt[3]{x}dx$

**191.** $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx$

**192.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x^3}}dx$

**193.** $\int \frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}$

**194.** $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

**195.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

**196.** $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$

**197.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

**198.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\log^2 x}}$

**199.** $\int \frac{\log x}{x\left(1-\log^2 x\right)}dx$

**200.** $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}dx$

**201.** $\int \frac{\left(\arctan x\right)^n}{1+x^2}dx$

**202.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$

**203.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$

**204.** $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^6 x} dx$

**205.** $\int \sqrt{\tan^3 x} \sec^4 x dx$

**206.** $\int (1 - \tan 3x)^2 dx$

**207.** $\int \frac{(1 + 2x^2)}{x^2(1 + x^2)} dx$

**208.** $\int \frac{(1+x)^2}{x(1 + x^2)} dx$

**209.** $\int \frac{dx}{\cos 2x + \operatorname{sen}^2 x}$

**210.** $\int (\operatorname{arcsen} x + \arccos x) dx$

**211.** $\int \frac{x^3}{x + 1} dx$

**212.** $\int \frac{x}{(x - 1)^3} dx$

**213.** $\int \frac{x}{\sqrt{2 + 4x}} dx$

**214.** $\int \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}} dx$

**215.** $\int x\sqrt{a + x dx}$

**216.** $\int \left(\sqrt{\operatorname{sen} x} + \cos x\right)^2 dx$

**217.** $\int a^{mx} b^{nx} dx$

**218.** $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

**219.** $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

**220.** $\int e^{e^x + x} dx$

**221.** $\int e^{2x^2 + \log x} dx$

**222.** $\int \frac{(1+x)^2}{x(1 + x^2)} dx$

**223.** $\int \frac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}} \arctan x dx$

**224.** $\int \frac{e^x(1 + e^x)}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

**225.** $\int \sqrt{e^x - 1 dx}$

**226.** $\int \frac{\log(x + 1) - \log x}{x(x + 1)} dx$

**227.** $\int \frac{dx}{x^6 + x^4}$

**228.** $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x + 1}} dx$

**229.** $\int \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$

**230.** $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}} dx$

**231.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$

**232.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x + x^2}}$

**233.** $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$

**234.** $\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}}$

**235.** $\int e^{\sqrt{x}} dx$

**236.** $\int \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} dx$

**237.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

**238.** $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}dx$

**239.** $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$

**240.** $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}dx$

**241.** $\int (1+e^{3x})^2\ e^{3x}dx$

**242.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

**243.** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\cos x}}dx$

**244.** $\int \sqrt{1-e^x}e^x dx$

**245.** $\int x\cos(x^2)dx$

**246.** $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$

**247.** $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

**248.** $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$

**249.** $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

**250.** $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$

**251.** $\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx$

**252.** $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-11x+2}}dx$

**253.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+3}}dx$

**254.** $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}dx$

**255.** $\int x\operatorname{sen} x\cos x dx$

**256.** $\int e^{2x}x^3 dx$

**257.** $\int \frac{\log(\cos x)}{\cos^2 x}dx$

**258.** $\int \frac{\cot x}{\log(\operatorname{sen} x)}dx$

**259.** $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$

**260.** $\int \frac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen} 3x}dx$

**261.** $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} 3x}$

**262.** $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{4-\cos^2 2x}dx$

**263.** $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}}dx$

**264.** $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

**265.** $\int \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx$

**266.** $\int e^x\operatorname{sen}^2 x dx$

**267.** $\int \frac{1+\tan x}{\operatorname{sen} 2x}dx$

**268.** $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$

**269.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen} x}$

**270.** $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx$

**271.** $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$

**272.** $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen} x}dx$

273. $\int \frac{\log(\log x)}{x} dx$

274. $\int x^3 e^{x^2} dx$

275. $\int e^{-x^2} x^5 dx$

276. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x dx$

277. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$

278. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}} dx$

279. $\int \operatorname{sen} 2x \cos^3 x dx$

280. $\int \frac{\sqrt{\log x}}{x} dx$

281. $\int \frac{\arctan^2 x}{1 + x^2} dx$

282. $\int \frac{dx}{\operatorname{arcsen}^3 x\sqrt{1 - x^2}}$

283. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1 + \tan x}}$

284. $\int \left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2} dx$

285. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x) dx$

286. $\int \frac{(2x - 3)dx}{x^2 - 3x + 8}$

287. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x^2}} dx$

288. $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$

289. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 + 4}}$

290. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 8}}{x^4} dx$

291. $\int \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x^6} dx$

292. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 3}}$

293. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx$

294. $\int \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} - 1} dx$

295. $\int \frac{dx}{(2 + x)\sqrt{1 + x}}$

296. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)} dx$

297. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} dx$

298. $\int \frac{x^7}{(1 - x^2)^5} dx$

299. $\int \frac{dx}{(ax + b)\sqrt{x}}$

300. $\int \frac{\sqrt{1 + x^8}}{x^{13}} dx$

301. $\int \frac{x}{\sqrt{(1 - x^4)^3}} dx$

302. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^4 + 4}} dx$

303. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x - 1)}$

304. $\int \frac{\sqrt{1 - x^3}}{x^2\sqrt{x}} dx$

305. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

306. $\int \frac{(1 - x)^2}{x\sqrt{x}} dx$

307. $\int \frac{\left(1 + \sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}} dx$

308. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$

**309.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 3x^2}}$

**310.** $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$

**311.** $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$

**312.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x} dx$

**313.** $\int \tan^2 x dx$

**314.** $\int \cot^2 x dx$

**315.** $\int \frac{dx}{(\tan x + 1)\operatorname{sen}^2 x}$

**316.** $\int \operatorname{senh} x = \cosh x dx$

**317.** $\int \frac{\operatorname{senh} \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}} dx$

**318.** $\int \frac{\operatorname{senh} x \cosh x}{\operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x} dx$

**319.** $\int \frac{x}{\operatorname{senh}^2 x} dx$

**320.** $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$

**321.** $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx$

**322.** $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx$

**323.** $\int \sqrt{e^x + 1} dx$

**324.** $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$

**325.** $\int x^3 \operatorname{arcsen} \frac{1}{x} dx$

**326.** $\int \cos(\log x) dx$

**327.** $\int (x^2 - 3x) \operatorname{sen} 5x dx$

**328.** $\int x \arctan (2x + 3) dx$

**329.** $\int \operatorname{arcsen} \sqrt{x} dx$

**330.** $\int |x| \, dx \quad \frac{x|x|}{2}$

**331.** $\int \frac{3 - 4x}{\left(1 - 2\sqrt{x}\right)^2} dx$

**332.** $\int \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)^2}{x^3} dx$

**333.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

**334.** $\int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx$

**335.** $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2}$

**336.** $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{\left(4x^2 - 2x + 1\right)^3}} dx$

**337.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5 - x} + \sqrt{5 - x}}$

**338.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3}} dx$

**339.** $\int \frac{x}{\left(1 + x^2\right)\sqrt{1 - x^4}} dx$

**340.** $\int \frac{x}{\sqrt{1 - 2x^2 - x^4}} dx$

**341.** $\int \frac{x + 1}{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3}} dx$

**342.** $\int \frac{dx}{\left(x^2 + 4x\right)\sqrt{4 - x^2}}$

**343.** $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$

**344.** $\int \sqrt{x - 4x^2} dx$

345. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$

346. $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 2}dx$

347. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 1}}$

348. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^3}}$

349. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$

350. $\int \frac{5x}{\sqrt[3]{1 + x^4}}dx$

351. $\int \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2}dx$

352. $\int 10^x\, dx$

353. $\int 2^x e^x dx$

354. $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx$

355. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}dx$

356. $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^5 x}$

357. $\int \frac{1 + \sqrt{\cot x}}{\operatorname{sen}^2 x}dx$

358. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$

359. $\int \csc^5 5x dx$

360. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}dx$

361. $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)dx$

362. $\int \tan^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx$

363. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}$

364. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x + 2\operatorname{sen}^2 x}$

365. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}$

366. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}$

367. $\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx$

368. $\int \operatorname{sen}^2 x dx$

369. $\int x^2 e^{x^3} dx \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

370. $\int x^2 \log\sqrt{1 - x}dx$

371. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$

372. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$

373. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}}$

374. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$

375. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}$

376. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}dx$

377. $\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}dx$

378. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)dx$

379. $\int \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x}dx$

380. $\int \cos x \operatorname{sen} 3x dx$

381. $\int \cos 2x \cos 3x\,dx$

382. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 5x\,dx$

383. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,dx$

384. $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx$

385. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}dx$

386. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

387. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

388. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

389. $\int \cos^3 x\,dx$

390. $\int \tan^4 x\,dx$

391. $\int \tan^3 x\,dx$

392. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x}$

393. $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

394. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}\,dx$

395. $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}dx$

396. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx$

397. $\int \frac{dx}{x \log x}$

398. $\int \frac{(\log x)^m}{x}dx$

399. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\,dx$

400. $\int a^{3x}\,dx$

401. $\int a^{-x}\,dx$

402. $\int e^{-3x+1}\,dx$

403. $\int e^{-x^3} x^2\,dx$

404. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

405. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$

406. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$

407. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6+4}$

408. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-8x^8}}$

409. $\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{1-4^x}}$

410. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$

411. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$

412. $\int (e^x+1)^3\,dx$

413. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

414. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$

415. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

416. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$

**417.** $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,dx$

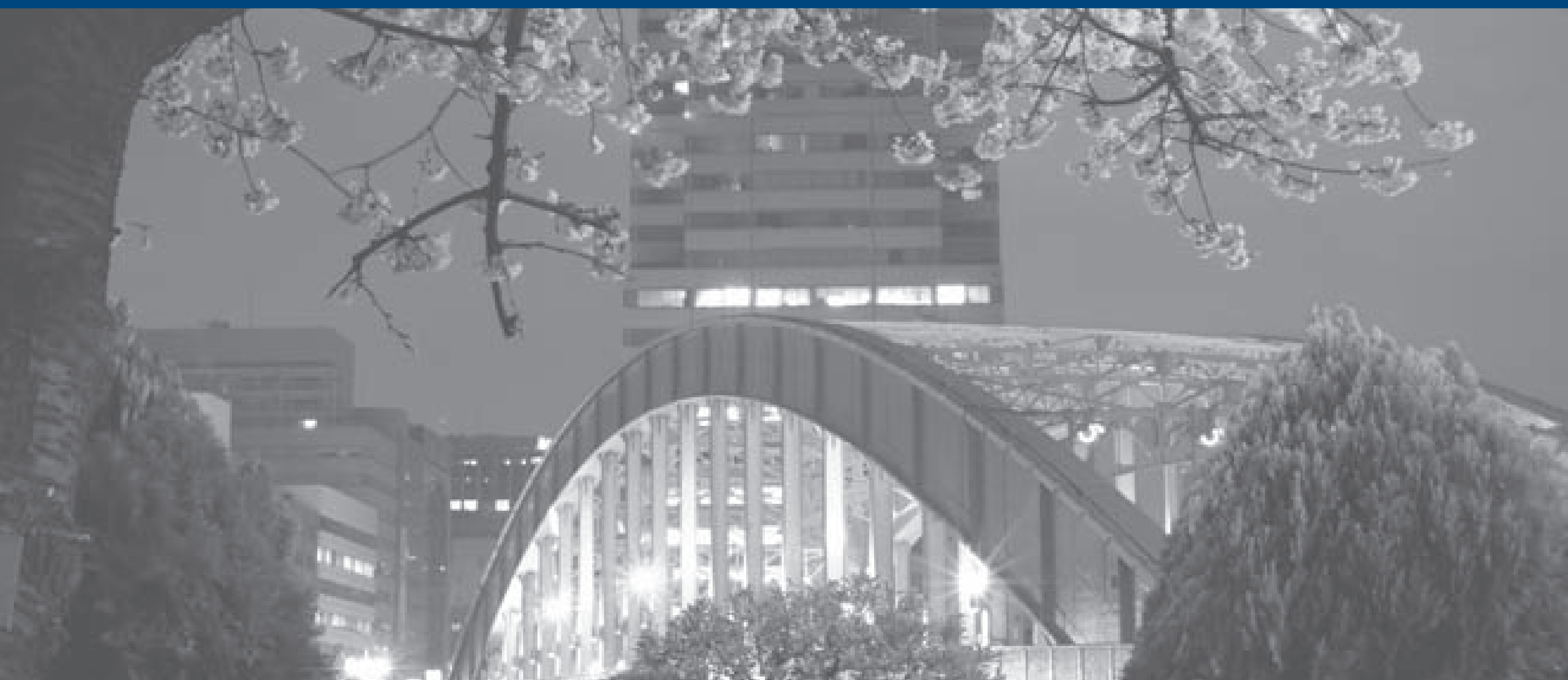
**418.** $\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

**419.** $\int \frac{2x-\sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**420.** $\int \frac{x+\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

# CAPÍTULO 4

# APLICACIONES DE LA INTEGRAL



# 4.1 Introducción

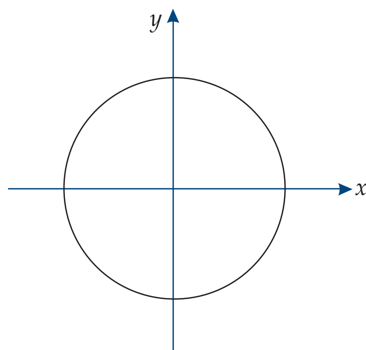
En este capítulo usaremos la integral para realizar cálculos de diferentes magnitudes físicas. Por ejemplo, calcularemos la presión hidrostática que ejerce un líquido sobre las paredes del recipiente que lo contiene, el volumen de un cuerpo sólido que es generado mediante la rotación de una curva alrededor de un eje, para este mismo tipo de sólidos determinaremos el centroide o centro de gravedad; también calcularemos la energía que se requiere para vaciar un recipiente que contiene un fluido. Por supuesto, la primera aplicación de la integral será el cálculo del área de regiones.

# 4.2 Cálculo de áreas de regiones

Como se expuso al inicio del capítulo 1, uno de los principales problemas que da lugar al concepto de integral es el de cálculo del área de una región dada en el plano. Si la región está limitada por una poligonal, puede triangularse y, por tanto, en teoría, es posible calcular su área. Pero, si la región está limitada por curvas que no están formadas por segmentos rectilíneos, la problemática es mucho más complicada. Por ejemplo, calcular el área de un círculo de radio $r$, es un problema difícil. Veamos cómo se traduce al contexto de integrales.

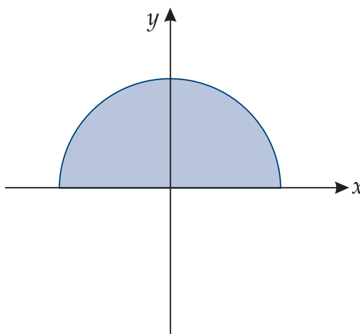
## 4.2.1 Área del círculo

Para iniciar, calculemos el área del círculo unitario. Sabemos que la ecuación de este en coordenadas cartesianas es $x^2 + y^2 = 1$.




Para calcular el área de este círculo, consideremos el semicírculo superior, que corresponde a la gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$




El área del círculo será el doble del área de este semicírculo, que está dada por la integral

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

y será cuatro veces el área de un cuadrante, o sea cuatro veces la integral

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ahora apliquemos el teorema fundamental del cálculo para calcular esta integral. Para tal efecto, recordemos que una primitiva de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}$, es decir

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

Entonces, obtenemos

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} 1.$$

Recordemos que arcsen 1 es igual a la longitud de un arco; de hecho, es igual a la cuarta parte de la circunferencia del círculo unitario, pues es la medida en radianes del ángulo cuyo seno es 1 y este ángulo es el recto. Así que arcsen $1 = \frac{1}{4}P$, donde $P$ es la circunferencia del círculo unitario. Esta relación es válida independientemente de que conozcamos o no el valor de $P$. Por tanto, si $P$ es la circunferencia del círculo unitario, podemos escribir

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{4} = \frac{P}{8}.$$

Entonces, el área $A$ del círculo unitario es

$$A = 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}P.$$

Con esto hemos mostrado que la integral nos lleva a una relación entre el área del círculo y su perímetro; específicamente, el área del círculo unitario es numéricamente igual a la mitad de su perímetro. Si conocemos el perímetro, es posible determinar el área, si conocemos el área, es posible determinar el perímetro.

Usando el mismo procedimiento, tenemos que en general para un círculo de radio $r$, el área está dada por

$$\begin{aligned} A(r) &= 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx \\ &= 4\left[\frac{r^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{r}+\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}\right]_{x=0}^{x=r} \\ &= 4\frac{r^2}{2}\operatorname{arcsen} 1 \\ &= 2r^2\operatorname{arcsen} 1 \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$A(r) = 2r^2\cdot\frac{P}{4} = \frac{1}{2}r^2P,$$

donde, como antes, $P$ es la circunferencia del círculo unitario. El área del círculo de radio $r$, está expresada en términos de la circunferencia $P$ del *círculo de radio* 1. Si usamos el hecho de que $P$ es igual a $2\pi$, entonces obtenemos la muy conocida fórmula para el área del círculo de radio $r$.

$$A(r) = \frac{1}{2}r^2P \quad = \pi r^2.$$

Podemos escribir la fórmula original, $A(r) = \frac{1}{2}r^2P$, en términos del perímetro $P(r)$ del círculo de radio $r$. Con ese fin, usemos el hecho de que cualquier par de círculos son semejantes, por lo que la razón entre sus radios es igual a la razón entre sus perímetros, así que $P(r) = rP(1) = rP$. De esta relación, obtenemos

$$A(r) = \frac{1}{2}r^2P = \frac{1}{2}r\cdot rP = \frac{1}{2}rP(r).$$

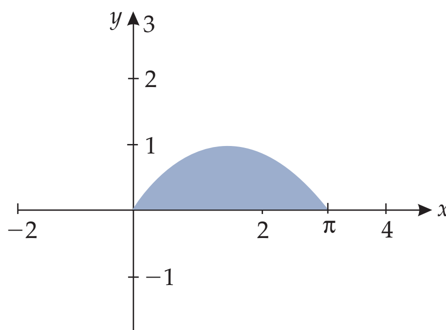
Esto significa que el área de un círculo de radio $r$ es igual a la mitad del producto del radio por su perímetro. Arquímedes realizó diversos trabajos del círculo, en uno de los resultados de su tratado *Medida del círculo*, el autor establece que todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo, cuyos catetos son iguales al radio y a la circunferencia del círculo; por supuesto se refiere al área del círculo. Como ese resultado equivale precisamente a la fórmula anterior, hemos recuperado el resultado de Arquímedes.

### 4.2.2 Región senoidal

El área de un círculo entraña el conocido y muy interesante número $\pi$. La naturaleza especial del área del círculo puede atribuirse a las características geométricas del mismo, si bien se trata de una figura con un contorno armonioso, tras esa armonía está el misterioso número $\pi$. Así como ocurre con el círculo, sería natural esperar que el área de la región limitada por la gráfica de la

función seno, también ocultara alguna situación especial, sin embargo este no es el caso, quizá ahora lo notable del caso es lo simple del resultado.

Consideremos la función $f(x) = \text{sen}\, x$ para $x$ en el intervalo $[0, \pi]$. Sea $A$ el área de la región delimitada por la gráfica de $f$ y el eje de las abscisas, como se muestra en la siguiente figura.




Esta área está dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \text{sen}\, x dx \\ &= \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= -(\cos \pi - \cos 0). \end{aligned}$$

Así que el área de esa región senoidal es

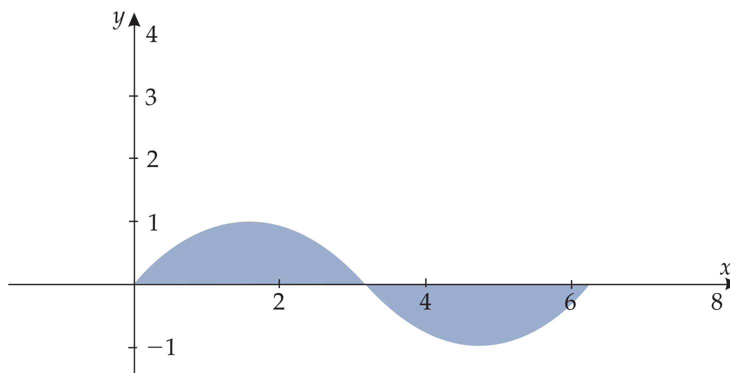
$$A = 2.$$

Por otra parte, tenemos

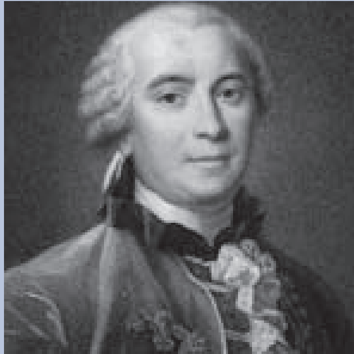
$$\int_0^{2\pi} \text{sen}\, x dx = \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{x=2\pi} = 0.$$

El valor cero se debe a que las integrales $\int_0^{\pi} \text{sen}\, x dx$ y $\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, x dx$ son iguales en valor absoluto pero de signo opuesto. La primera de las integrales vale 2, mientras que la segunda es igual a $-2$; por tanto, se sigue de la propiedad de aditividad de la integral que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}\, x dx = \int_0^{\pi} \text{sen}\, x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, x dx = 2 + (-2) = 0.$$



Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707-1788)



Científico francés. Estudioso y experto en medicina, botánica y matemáticas. Fue elegido miembro de la Academia Francesa de Ciencias a los 27 años y en 1737 fue nombrado director de los jardines reales. Entre sus principales obras destacan *Histoire naturelle, générale et particulière* (*Historia natural, general y particular*), realizada por encargo del rey Luis XV de Francia y conocida desde entonces como la Historia Natural de Buffon, la cual es un tratado de todos los conocimientos de la época en materia de historia natural, antropología y geología.

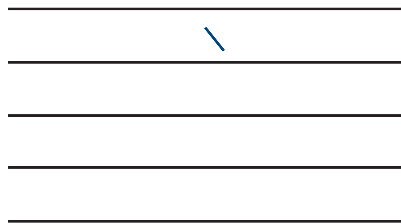
Buffon era un gran admirador de Arquímedes, a quien reconocía su legado a las matemáticas; en particular, elogiaba su *maquinaria de guerra*, sobre todo los espejos ustorios con los cuales, cuenta la leyenda, Arquímedes defendió Siracusa. Decidido a resucitar la maquinaria guerrera del griego y probar la verosimilitud de la historia, Buffon construyó, en 1747, su propio espejo ustorio e invitó a la corte a presenciar el experimento en los reales jardines botánicos, los cuales en esa época estaban bajo su cargo. Para llevar a cabo su demostración, preparó una pila de trozos de madera y trapos y la colocó a aproximadamente 50 metros de distancia, aprovechando la luz del Sol, el Conde dirigió el espejo a su objetivo, sin embargo, en ese preciso momento el Conde Flambée se cruzó ante el trayecto del rayo y este quemó su peluca. Tan divertido fue el hecho para el rey Luis XV, que pidió repetirlo. Esta vez sin peluca, el conde Flambée recibió el rayo directo al cráneo, lo que le valió su ascenso a Duque Crâne Flambée. A pesar del divertido incidente, el experimento fue un éxito, pues el incendio se extendió a unas palmeras cercanas. Tan complacido se encontraba el monarca con los resultados de la demostración que ofreció un banquete en el palacio de Versalles, donde, cuentan las crónicas, Buffon propuso al rey un juego problema que consistía en lanzar una aguja de longitud $d$, a una superficie plana con líneas paralelas dibujadas, separadas entre sí por una distancia constante $L$, y planteando las preguntas: ¿cuál es la probabilidad de que la aguja toque una línea?, ¿qué tiene

No obstante que la función sen $x$ está íntimamente relacionada con el número $\pi$, el área que hemos obtenido no da cuenta de este número. Sin embargo, la relación entre el número $\pi$ y la función sen $x$ se manifiesta de una manera muy interesante en el curioso problema que planteamos y resolvemos a continuación.

### 4.2.2.1 La aguja de Buffon

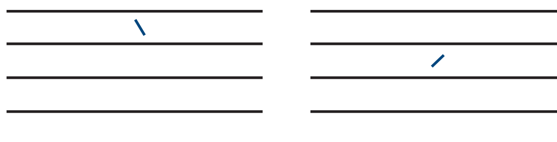
En esta sección aplicaremos el resultado obtenido antes a un interesante problema. Se trata de un juego donde se tiene un rayado de líneas paralelas separadas dos unidades de longitud y una aguja de una unidad de longitud. Si dispone de una aguja, simplemente trace líneas paralelas, tales que la separación entre dos adyacentes sea el doble de la longitud de la aguja (véase figura).

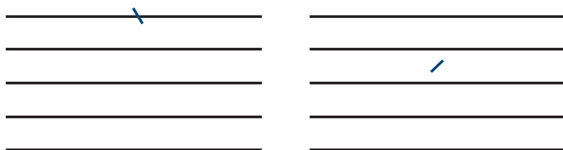
Asumiremos que la longitud de la aguja es 1.



Enseguida, lance la aguja hacia la superficie rayada un número grande de veces, unas 100 veces o si gusta láncela 1 000. Entre más arroje la aguja será mejor. Registre el número de lanzamientos para los cuales la aguja cruza una de las líneas. Después divida el número total de lanzamientos entre las veces en las que la aguja cruce alguna línea, el cociente obtenido será aproximadamente $\pi$. Probemos esta afirmación.

Para llevar a cabo nuestro análisis, necesitaremos caracterizar las posiciones de la aguja respecto al rayado al cual se lanza. Dibujemos las líneas en una hoja de papel en posición horizontal. Si la aguja no está en posición horizontal, entonces tiene una dirección de sur-oeste a noreste o bien está dirigida de noroeste a sureste. Cualquier posición de la aguja o es horizontal o bien tiene un extremo que se encuentra más al sur, este extremo lo tomaremos como referencia cuando la aguja esté en ese caso. Cuando se encuentre en posición horizontal, tomaremos como referencia el extremo oeste, el de la izquierda.



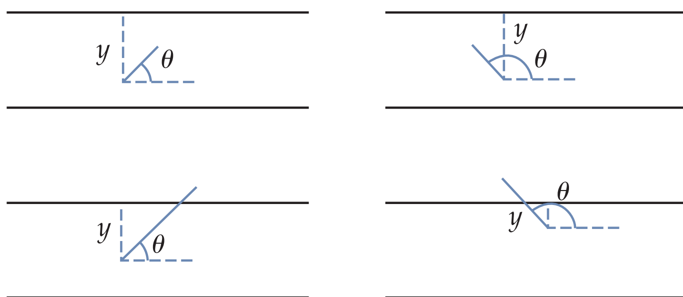


Cada vez que lancemos la aguja, registramos la posición relativa del extremo de referencia por su distancia $y$ a la línea inmediata arriba de este (cuando el extremo no se encuentre exactamente sobre una línea). Esta distancia satisface la desigualdad $0 < y \leq 2$.

Por otra parte, caracterizamos la orientación de la aguja por el ángulo $\theta$ que forma con el semieje derecho que parte del extremo de referencia, como se ilustra en la figura siguiente. El ángulo $\theta$ cumple: $0 \leq \theta < \pi$.

que ver $\pi$ en todo esto?..., y allí dejó Buffon a la corte, tirando la aguja... Problema que desde entonces se conocería como "el problema de la aguja de Buffon".

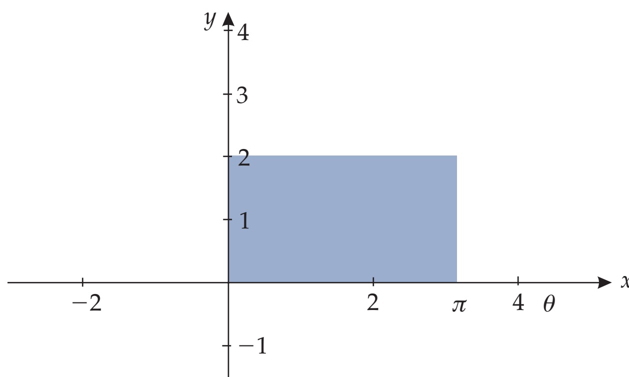
Un mes después de la primera demostración del experimento de los espejos, Buffon decidió repetirlo con un espejo más grande, esta vez su blanco eran seis casas a 300 metros de distancia. De nueva cuenta, el experimento fue todo un éxito, pues cuando el rayo de Sol fue proyectado se incendiaron las seis casas y 795 más. Desde entonces, Buffon se dedicó a desarrollar y ampliar su obra *La historia natural*.




De esta manera, cualquier posición de la aguja está determinada por una única pareja $(\theta, y)$ que satisface las desigualdades

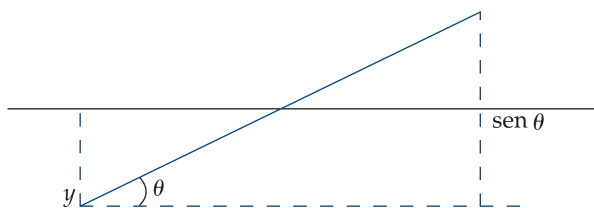
$$0 \leq \theta < \pi \qquad \text{y} \qquad 0 < y \leq 2.$$

Además, toda pareja $(\theta, y)$ que satisface estas desigualdades corresponde a una posición de la aguja. En matemáticas esto se expresa diciendo que hay una correspondencia biunívoca entre las posiciones de la aguja y las parejas $(\theta, y)$ que satisfacen las desigualdades anteriores. El conjunto de estas es precisamente el producto cartesiano $[0, \pi) \times (0, 2]$ y se interpreta geométricamente como un rectángulo en el plano cartesiano (véase figura).

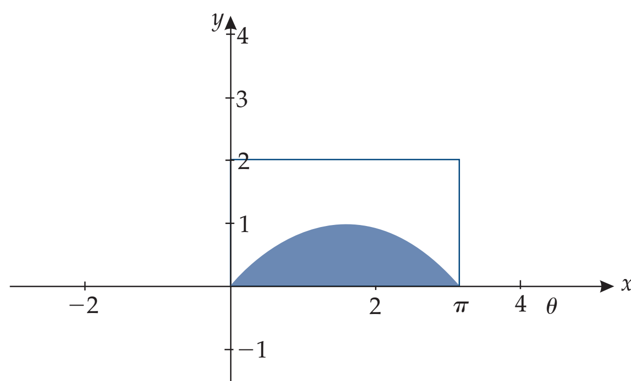



Las parejas $(r, \theta) \in [0, \pi) \times (0, 2]$ representan algebraicamente todas las posibles posiciones que puede tener la aguja.

Ahora, determinemos los puntos de este producto cartesiano que corresponden a las posiciones de la aguja cuando cruza alguna línea. La aguja cruza la línea de arriba, si y solo si $y \leq \operatorname{sen} \theta$.




Las parejas ($\theta$, $y$) que satisfacen esta desigualdad corresponden a los puntos de la región $A$, comprendida entre la función sen $\theta$ y el eje de las abscisas




Este es un ejemplo de lo que se conoce como probabilidad geométrica. Los puntos del rectángulo representan todos los posibles resultados del experimento, es decir, todos los posibles eventos; es el espacio muestra. De esta forma, los puntos de la región $A$ corresponden a todos los eventos favorables. Por tanto, la probabilidad de que se obtenga un caso favorable es igual al cociente que resulta de dividir el área de la región $A$ entre el área del rectángulo, que es $2\pi$. Pero el área de $A$ está dada por

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 2.$$

Así que la probabilidad de que al lanzar la aguja al rayado, corte una de las líneas paralelas es

$$\frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

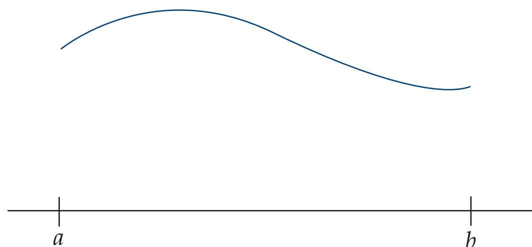
El recíproco de esta probabilidad es precisamente $\pi$. Por consiguiente, si lanza la aguja un número "grande de veces", el resultado de dividir el número de lanzamientos entre las veces que la aguja corta una línea es aproximadamente $\pi$.

## 4.3 Volúmenes de sólidos de revolución

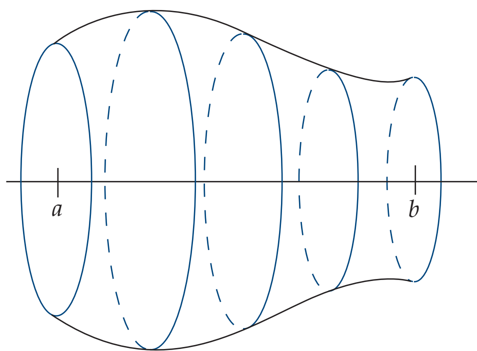
Aun cuando la integral surge del problema de calcular áreas de regiones en el plano, el tratamiento analítico que le hemos dado aquí, a través de las sumas de Riemann, le da identidad propia

y deja la posibilidad de que la integral de una función en un intervalo represente magnitudes de diferente naturaleza. Por ejemplo, en esta sección calcularemos volúmenes de sólidos en el espacio mediante la integral, si bien estos serán de forma un tanto particular, no por eso dejarán de tener un alto grado de generalidad.

Supóngase que tenemos una función $f$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$.




Rotemos esta función alrededor del eje de las abscisas, con esto se genera una superficie en el espacio tridimensional.




Esta superficie delimita un sólido que generamos por la rotación de la región "bajo" la curva, alrededor del mismo eje. El volumen de este sólido puede ser aproximado mediante la suma de volúmenes de pequeños cilindros, a través de un proceso similar al empleado para aproximarnos al área bajo la gráfica de una función. Para cada entero positivo $n$, sea $\wp_n$ una partición del intervalo $[a, b]$ de $n + 1$ puntos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Sean $x_{i-1}$ y $x_i$ dos puntos de esta partición y $t_i$ un punto intermedio; el sólido generado por la rotación del rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(t_i)$, es un cilindro de radio $f(t_i)$ y altura $x_i - x_{i-1}$, por tanto, su volumen es

$$V_i = (x_i - x_{i-1})\pi f^2(t_i).$$

Construyamos la suma de estos volúmenes

$$R(\pi f^2, \wp_n) = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi f^2(t_i).$$

Esta es una suma de Riemann para la función $\pi f^2$, la cual es una aproximación al volumen del sólido de revolución. Si la sucesión de mallas $(\delta_n)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, como $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$, existe

$$\lim_{n\to\infty} R(\pi f^2, \wp_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi f^2(t_i).$$

Este límite es precisamente

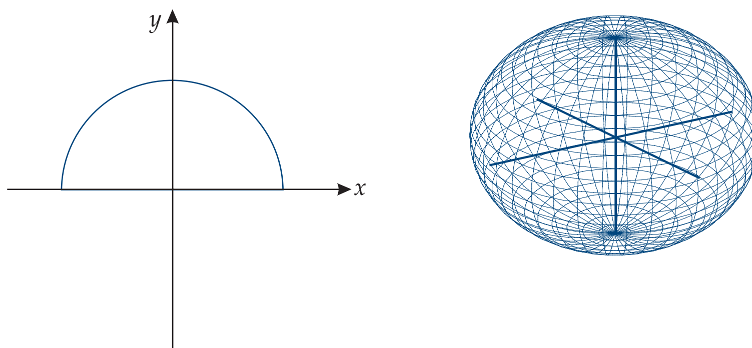
$$\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Así que el volumen del sólido está dado por

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

## 4.3.1 Volumen de una esfera

La esfera con centro en el origen y radio $r$, la podemos generar rotando el semicírculo de radio $r$, que es la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ .




El volumen $V(r)$ de la esfera es el doble del correspondiente al hemisferio derecho:

$$\begin{aligned} V(r) &= 2\int_0^r \pi f^2(x)dx \\ &= 2\int_0^r \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=r} \\ &= 2\pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right). \end{aligned}$$

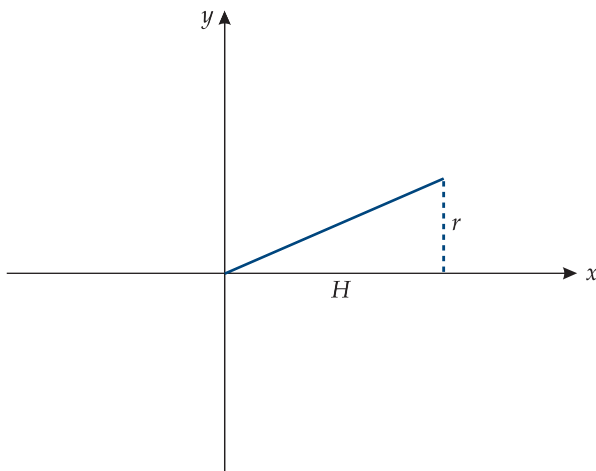
O sea

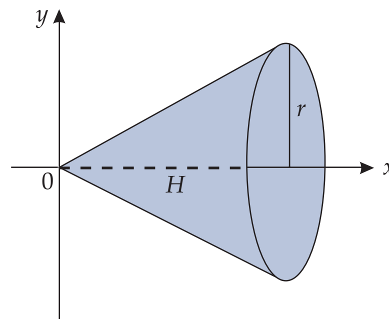
$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Esta es la fórmula para el volumen de la esfera de radio $r$.

### 4.3.2 Volumen de un cono

Consideremos un cono recto, cuya base es un círculo de radio $r$ y altura $H$. Este se puede generar si rotamos la recta que pasa por el origen y el punto $(H, r)$.




La recta es la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{r}{H}x$ en el intervalo $[0, H]$. Entonces, el volumen $V(r, H)$ del cono está dado por

$$\begin{aligned} V(r, H) &= \int_0^H \pi f^2(x)dx \\ &= \int_0^H \pi f^2(x)dx \\ &= \int_0^H \pi(\frac{r}{H}x)^2 dx \\ &= \pi \frac{r^2}{H^2}\int_0^H x^2 dx. \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula para el volumen del cono es

$$V(r, H) = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

De la relación anterior concluimos que el volumen de un cono recto de base circular de radio $r$ y altura $H$, es un tercio del volumen del cilindro de las mismas base y altura.

### 4.3.3 Volumen de un elipsoide de revolución

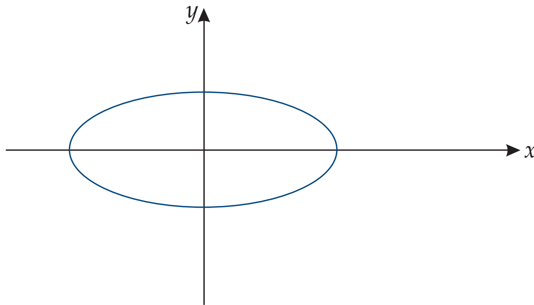
Consideremos la elipse de semieje mayor $a > 0$ y semieje menor $b > 0$. Respecto al sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro de la elipse y eje de las abscisas conteniendo al eje mayor, la ecuación de la elipse queda

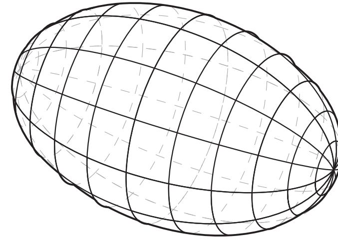
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o sea

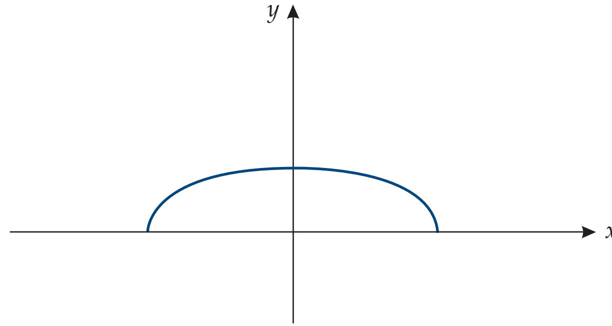
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

El sólido que se obtiene al rotar la elipse alrededor de su eje mayor se llama **elipsoide de revolución**.



El elipsoide también se obtiene rotando la gráfica de la función $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ en el intervalo $[-a, a]$ ("media elipse").




Como en los ejemplos anteriores, el volumen del elipsoide es igual al doble del de la parte correspondiente al intervalo $[0, a]$. Si denotamos por $V(a, b)$, el volumen del elipsoide, entonces tenemos

$$\begin{aligned} V(a,b) &= 2\int_0^a \pi f^2(x)dx \\ &= 2\int_0^a \pi\left(\frac{b^2}{a^2}a^2 - x^2\right)dx \\ &= 2\frac{b^2}{a^2}\pi\int_0^a (a^2 - x^2)dx \\ &= 2\frac{b^2}{a^2}\pi\left[\int_0^a a^2dx - \int_0^a x^2dx\right] \\ &= 2\frac{b^2}{a^2}\pi\left[a^3 - \frac{1}{3}a^3\right] \end{aligned}$$

Por tanto, el volumen del elipsoide está dado por

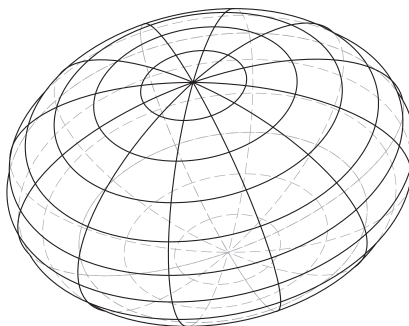
$$V(a, b) = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Note que si en la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hacemos $a = b$, obtenemos la ecuación de un círculo de radio $a$ y el elipsoide de revolución es una esfera de radio $a$. La fórmula del volumen $V(a, b) = \dfrac{4}{3}\pi ab^2$ del elipsoide, se reduce, en este caso, a la fórmula del volumen de la esfera $\dfrac{4}{3}\pi a^3$, que obtuvimos antes.

La elipse de semiejes mayor y menor, $a > 0$ y $b > 0$, respectivamente, que rotamos alrededor de su eje mayor, también la pudimos haber rotado alrededor del menor, con lo cual se obtendría una especie de cojín.



En este caso, hacemos que el eje de las abscisas del sistema de ejes coordenados contenga al eje menor, de esta forma, la ecuación queda

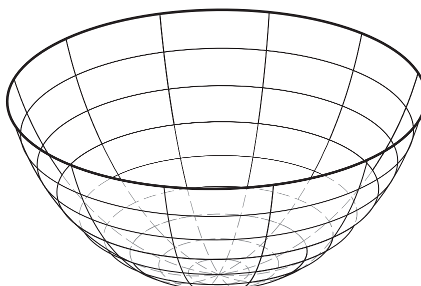
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

El procedimiento para calcular el volumen es el mismo que para el caso anterior, simplemente se intercambian los papeles de $a$ y $b$, así que el volumen está dado por la fórmula

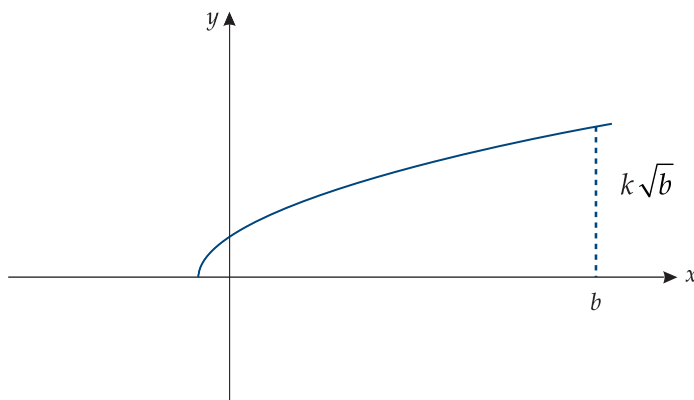
$$V(a, b) = \frac{4}{3}\pi ba^2.$$

### 4.3.4 Volumen de un paraboloide de revolución

Un paraboloide de revolución se obtiene rotando una parábola alrededor de su eje.



El vértice de un paraboloide es el punto correspondiente al vértice de la parábola que lo genera. Calcularemos el volumen de la parte del paraboloide comprendida entre su vértice y un plano perpendicular a su eje. Si ubicamos la parábola en un sistema de ejes cartesianos, de manera que el eje de la parábola coincida con el semieje positivo de las abscisas, la ecuación de la parábola tiene la forma $x = cy^2$, donde $c$ es una constante positiva. El paraboloide de revolución se genera rotando la gráfica de la función $f(x) = k\sqrt{x}$, donde $k = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.



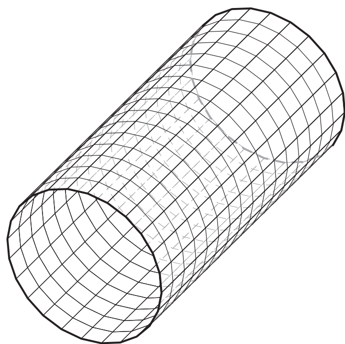

El volumen $V(k, b)$ de la parte del paraboloide correspondiente al intervalo $[0, b]$, está dado por

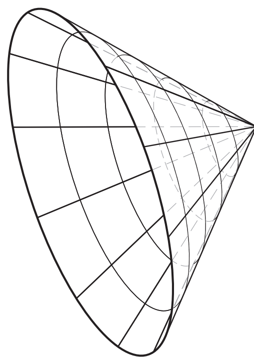
$$\begin{aligned} V(k,b) &= \pi \int_0^b f^2(x)dx \\ &= \pi \int_0^b k^2 x dx \\ &= \pi k^2 \int_0^b x dx \\ &= \pi k^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=b}. \end{aligned}$$

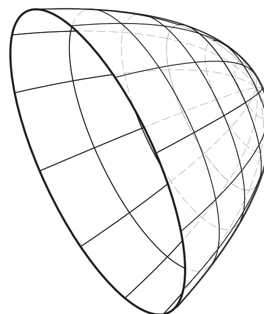
Con lo que obtenemos la fórmula

$$V(k, b) = \frac{1}{2} \pi k^2 b^2.$$

Comparemos el volumen del segmento de paraboloide de altura $b$ con el volumen del cilindro de mismas base y altura. El radio de la base es $k\sqrt{b}$ , así que el área de la base es $\pi k^2 b$, por tanto, el volumen del cilindro es $\pi k^2 b^2$. Entonces, tenemos que el volumen del segmento de paraboloide es $\frac{1}{2}$ del correspondiente al cilindro, mientras que el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del mismo.







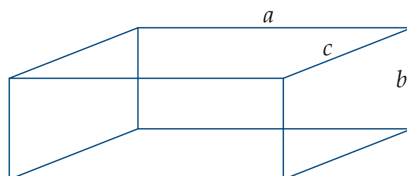
# 4.4 Presión hidrostática

En términos generales y un tanto imprecisos, la integral es el paso al límite de la acumulación o la adición de cantidades pequeñas que forman un todo. Estas pueden ser de cualquier naturaleza. Las cantidades de los casos que tratamos antes se referían a áreas o volúmenes, pero ahora tendrán otros significados.

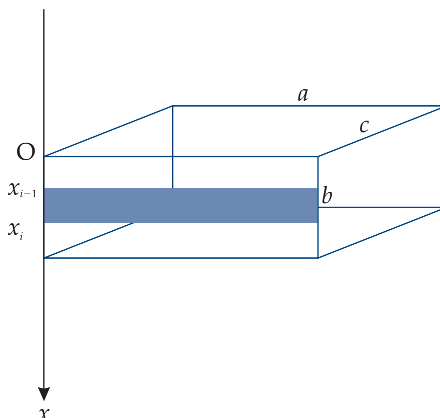
Esta sección está dedicada al problema de calcular la presión que ejerce un líquido sobre las paredes del recipiente que lo contiene. Abordaremos el problema para diferentes formas del recipiente; para tal efecto, partiremos del principio hidrostático de que una superficie plana que se encuentra a una profundidad $h$, experimenta una fuerza igual al peso del líquido de una columna cuya base es el área de la superficie y altura la profundidad $h$, sin importar la orientación de la superficie, con tal que todos sus puntos se encuentren aproximadamente a la misma profundidad. Si la superficie es plana y está en posición horizontal, todos sus puntos están a la misma profundidad, así que para esos casos aplica el principio, sin importar el tamaño de la superficie. En los siguientes ejemplos asumiremos que el líquido del recipiente es agua, por lo que podemos suponer que es de densidad 1 y que su peso será numéricamente igual a su volumen.

## 4.4.1 Prisma recto con base rectangular

Supongamos un recipiente lleno de agua, cuya forma es un prisma recto de altura $b$ y de base un rectángulo de lados $a$ y $c$. Calculemos la presión que el agua ejerce sobre la pared vertical rectangular de base $a$ y altura $b$.




Para calcular la presión sobre una de estas caras, coloquemos un sistema de ejes cartesianos, de tal manera que una de las aristas verticales sea el eje de las abscisas y la otra perpendicular sea el eje de las ordenadas, como se muestra en la figura.



Para cada entero positivo $n$, sea $\wp_n$ una partición del intervalo $[0, b]$ de $n + 1$ puntos:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Sean $x_{i-1}$ y $x_i$ dos puntos de esta partición. La presión $P_i$ que experimenta la placa rectangular que tiene por lados el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y la arista de longitud $a$ es aproximadamente el producto de su área $(x_i - x_{i-1})a$ por la profundidad $x_i$ a la que se encuentra uno de los lados de la placa, es decir

$$P_i = a(x_i - x_{i-1})x_i.$$

La presión $P$ que ejerce el agua sobre la cara lateral del recipiente es aproximadamente la suma de las presiones sobre cada una de las placas determinadas por la partición $\wp_n$, es decir

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} a(x_i - x_{i-1})x_i.$$

El miembro derecho de la expresión anterior es una suma de Riemann de la función $f(x) = ax$ en el intervalo $[0, b]$,

$$R(ax, \wp_n) = \sum_{i=1}^{n} a(x_i - x_{i-1})x_i.$$

Por tanto, si la sucesión de mallas $(\delta_n)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, se tiene

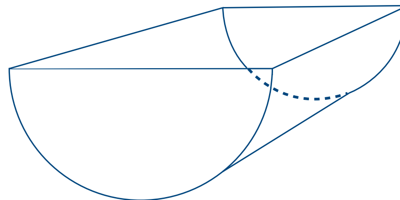
$$\lim_{n\to\infty} R(ax, \wp_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a(x_i - x_{i-1})x_i = \int_0^b ax\,dx.$$

De esta forma, la presión ejercida por el agua sobre la cara lateral de lados $a$ y $b$, está dada por

$$P = a\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}ab^2.$$

### 4.4.2 Abrevadero cara circular

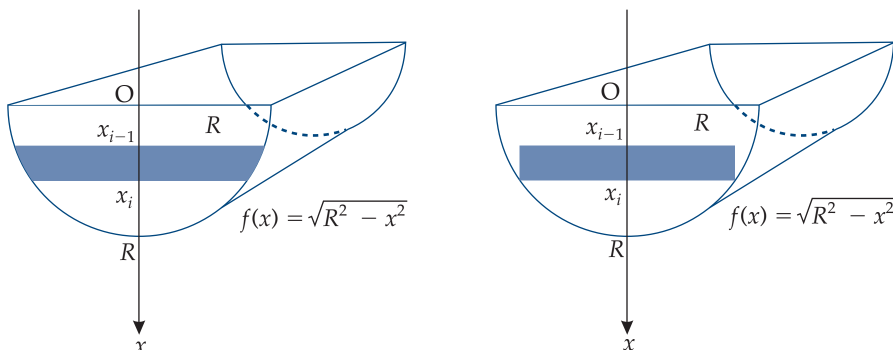
Ahora, consideremos un recipiente como el de la siguiente figura.



El contenedor tiene la forma de un abrevadero; sus dos caras laterales son semicírculos, los cuales suponemos de radio $R$. Consideremos que el recipiente se encuentra lleno de agua; calculemos la presión sobre la cara circular. Como en los ejemplos anteriores, elegimos un sistema de referencia, como se ilustra en la figura siguiente. Consideremos la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en el intervalo $[0, R]$. Para cada entero positivo $n$, sea $\wp_n$ una partición del intervalo $[0, R]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = R.$$

Sean $x_{i-1}$ y $x_i$ dos puntos de esta partición. La placa sobre el semicírculo de ancho $x_i - x_{i-1}$, la aproximamos por el rectángulo de ancho $x_i - x_{i-1}$ y largo $2f(x_i)$.




Si $x_i - x_{i-1}$ es pequeño, la presión sobre esta placa rectangular, está dada aproximadamente por

$$P_i = (x_i - x_{i-1})2\, f(x_i)x_i$$

pues la placa se encuentra alrededor de una profundidad $x_i$.

La presión que ejerce el agua sobre la cara lateral del recipiente es aproximadamente la suma de las presiones sobre cada una de las placas rectangulares determinadas por la partición $\wp_n$, es decir, si $P$ es tal presión, entonces

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})2\, f(x_i)x_i.$$

El miembro derecho de la expresión anterior es una suma de Riemann de la función $2xf(x)$ en el intervalo $[0, R]$:

$$R(2xf(x),\ \wp_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})2x_i\, f(x_i).$$

Por tanto, si la sucesión de mallas $(\delta_n)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} R(2xf(x),\wp_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})2x_i\, f(x_i) = \int_0^R 2xf(x)dx.$$

Entonces, la presión ejercida por el agua sobre la cara semicircular de radio $R$ está dada por

$$P = \int_0^R 2xf(x)dx = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

O sea

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx \\ &= -\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,(-2x)\,dx \\ &= -\left[\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=R}. \end{aligned}$$

De donde, finalmente, obtenemos

$$P = \frac{2}{3}R^3.$$

## 4.4.3 Abrevadero de cara triangular

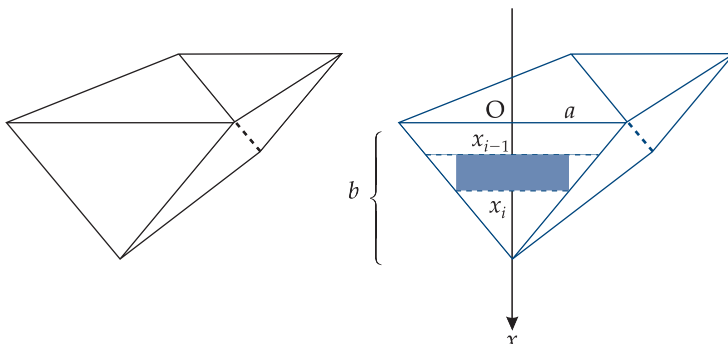
El abrevadero de esta sección tiene dos caras laterales que son triángulos isósceles de altura $b$ y base $2a$. Como en los casos anteriores, elegimos un sistema de ejes coordenados, como se muestra en la figura, y definimos la función

$$f(x) = -\frac{a}{b}(x - b).$$

Sea $n$ un entero positivo y $\wp_n$ una partición del intervalo $[0, R]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = R.$$

Si $x_{i-1}$ y $x_i$ son dos puntos de esta partición, aproximamos la placa de ancho $x_i - x_{i-1}$ por el rectángulo de ancho $x_i - x_{i-1}$ y largo $2f(x_i) = -\frac{2a}{b}(x_i - b)$.




Si $x_i - x_{i-1}$ es pequeño, la presión sobre esta placa rectangular está dada por

$$P_i = (x_i - x_{i-1})2f(x_i)x_i.$$

Esta expresión tiene la misma forma que la de la presión $P_i$ del ejemplo anterior, pero ahora se trata de otra función. Entonces, la presión sobre la cara lateral triangular está dada por

$$\begin{aligned} P &= \int_0^b 2xf(x)dx \\ &= -\int_0^b 2x\frac{a}{b}(x-b)dx \\ &= -2\frac{a}{b}\int_0^b x(x-b)dx \\ &= -2\frac{a}{b}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}bx^2\right]_{x=0}^{x=b}. \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos algebraicos, obtenemos

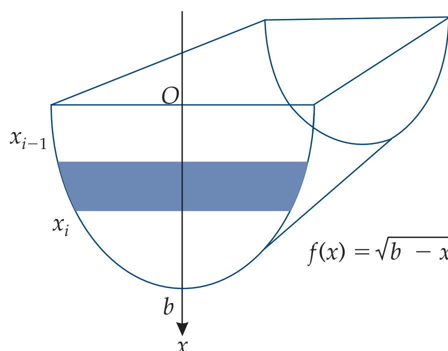
$$P = \frac{1}{3}ab^2.$$

### 4.4.4 Abrevadero de cara parabólica

Usando las ideas de los ejemplos anteriores, es fácil ver que, en general, la presión sobre la cara lateral cuyo contorno es descrito por la gráfica de una función $f(x)$, está dada por

$$P = \int_0^b 2x\, f(x)dx,$$

donde $b$ es la altura del abrevadero, que es igual a la distancia entre el origen $O$ y el punto más bajo de la cara lateral. En la siguiente figura, la cara lateral del abrevadero es una región parabólica.




En este caso, la función es $f(x) = \sqrt{b - x}$, por lo que la presión está dada por

$$\begin{aligned} P &= \int_0^b 2xf(x)dx \\ &= \int_0^b 2x\sqrt{b-x}dx. \end{aligned}$$

Calculemos esta integral. Hagamos $u = \sqrt{b - x}$, o sea $x = b - u^2$ y $dx = -2udu$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{b-x}dx &= \int (b-u^2)u(-2u)du \\ &= 2\int (u^2-b)u^2du \\ &= 2\int u^4du - 2b\int u^2du \\ &= \frac{2}{5}u^5 - \frac{2}{3}bu^3 \\ &= \frac{2}{5}(b-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}b(b-x)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

De donde

$$\int_0^b x\sqrt{b-x}\,dx = \left[\frac{2}{5}(b-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}b(b-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=b}.$$

Haciendo las simplificaciones algebraicas, obtenemos

$$\int_0^b x\sqrt{b-x}\,dx = \frac{4}{15}b^{\frac{5}{2}}.$$

Por tanto, la presión es

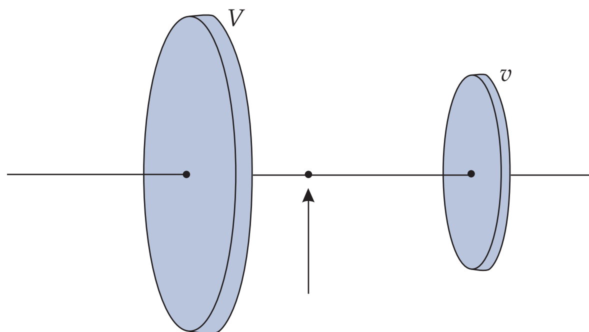
$$P = \int_0^b 2x\sqrt{b-x}\,dx = \frac{8}{15}b^{\frac{5}{2}}.$$

## 4.5 Centros de gravedad

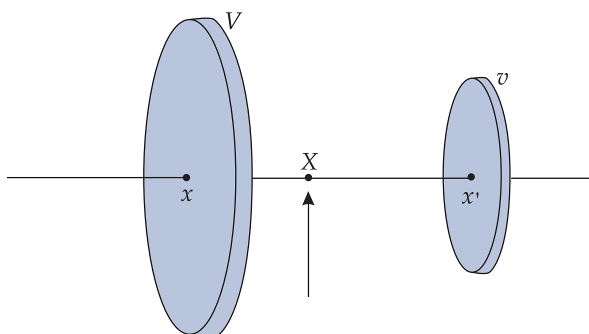
Una de las más conocidas e importantes aportaciones de Arquímedes a la humanidad, es la famosa *ley de la palanca*. Su célebre frase *"Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo"*, apenas da cuenta del gran potencial de este simple principio, del beneficio que ha redituado a todas las civilizaciones y de su insospechada presencia en casi cualquier artefacto mecánico, que puede ser desde la carretilla que usan los trabajadores de la construcción, hasta las gigantescas grúas que se utilizan para tender impresionantes puentes. A continuación, enunciamos esta ley, misma que generalizamos con la ayuda del cálculo integral, lo cual nos conducirá al concepto de *centro de gravedad* o *centroide*.



Supongamos que tenemos dos discos delgados de material homogéneo y que están dispuestos de forma paralela. Consideremos la recta que pasa por sus centros, como se ilustra en la figura siguiente. El peso de cada uno de los discos es proporcional a su volumen, de hecho, es igual al producto del volumen por el peso específico. Por otra parte, el volumen es igual al producto de su grosor por el área de la cara circular. Sean $V$ y $v$ los volúmenes respectivos.



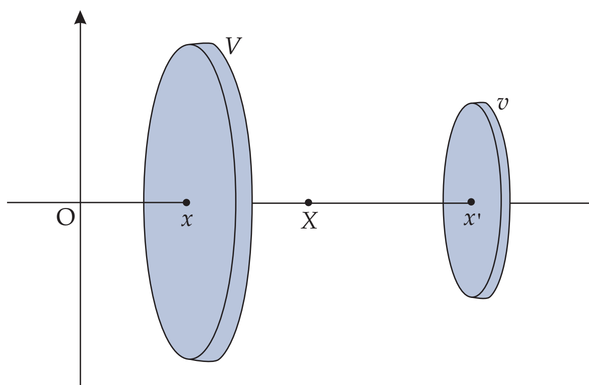

Puesto que los discos son delgados, podemos suponer que el peso de cada uno ejerce una fuerza hacia abajo en un punto sobre el eje donde descansa el disco. Sea $x$ el punto para el disco de volumen $V$ y $x'$ el punto correspondiente para el disco de volumen $v$. Vamos a referirnos a $x$ y $x'$, como los puntos donde se ubican los discos.




La ley de la palanca establece que hay un punto $X$ sobre el eje que pasa por los centros de los discos tal que el sistema se mantiene en equilibrio si se ejerce una fuerza hacia arriba en $X$, igual a la suma de los pesos de los dos discos, y este punto $X$ es tal que el producto del peso de $V$ por la distancia de $x$ a $X$ es igual al producto del peso de v por la distancia de $x'$ a $X$. Puesto que el peso de cada uno de los discos es proporcional al volumen correspondiente, en símbolos este principio puede escribirse en términos de los volúmenes y las distancias correspondientes como

$$V \cdot d(x, X) = v \cdot d(x', X)$$

Vamos a referirnos a la distancia de $x$ a $X$ como la del disco $V$ a $X$, de la misma manera, nos referiremos a la distancia de $x'$ a $X$ como la del disco v al punto $X$. Usando esta convención, la ley de la palanca puede enunciarse como sigue: *el punto de equilibrio X es tal que el producto de V por su distancia a X es igual al producto de* v *por su distancia al mismo punto*. Ahora, escribamos la relación anterior de otra forma. Elijamos un sistema de referencia de dos ejes cartesianos, tal que el eje de las abscisas coincida con la recta que pasa por los centros de los discos, como se muestra en la siguiente figura.



En este caso, $x$ representa la abscisa del centro del disco del volumen $V$ y $x'$ la correspondiente abscisa para el disco de volumen ν. Entonces, la relación anterior se escribe

$$V \cdot (X - x) = \nu \cdot (x' - X).$$

De aquí se obtiene

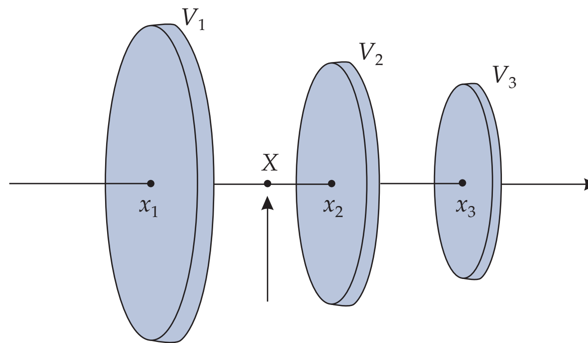
$$(V + v)X = Vx + vx',$$

o sea

$$X = \frac{Vx + vx'}{V + v}.$$

Esta fórmula nos permite determinar la abscisa $X$ del punto de equilibrio.

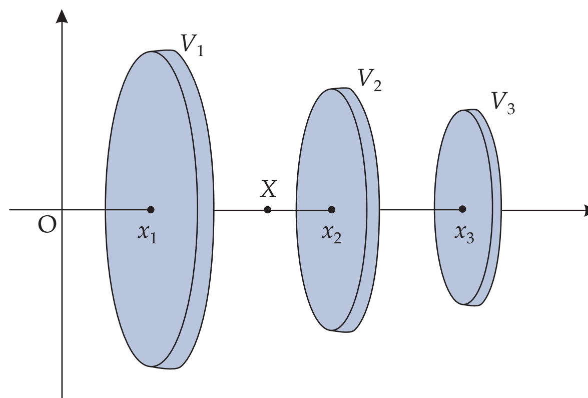
La ley de la palanca para el caso de tres o más discos paralelos de volúmenes $V_1, V_2, \ldots, V_n$, respectivamente, establece que hay un punto $X$ sobre la recta que pasa por sus centros, tal que la suma de los productos de los pesos de los discos que se encuentran a la derecha de $X$ por su distancia a $X$, es igual a la suma de los productos de los pesos de los discos de la izquierda por su distancia a $X$.




Para el caso particular de la figura anterior, esta ley se escribe

$$V_1 \cdot d(x_1, X) = V_2 \cdot d(x_2, X) + V_3 \cdot d(x_3, X).$$

Elijamos un sistema de referencia de dos ejes cartesianos, como se ilustra en la siguiente figura.



Entonces, el principio establece que el punto de equilibrio $X$ es tal que

$$V_1 \cdot d(x_1, X) = V_2 \cdot d(x_2, X) + V_3 \cdot d(x_3, X)$$
$$V_1 \cdot (X - x_1) = V_2 \cdot (x_2 - X) + V_3 \cdot (x_3 - X).$$

O sea

$$(V_1 + V_2 + V_3)X = V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3.$$

Es decir

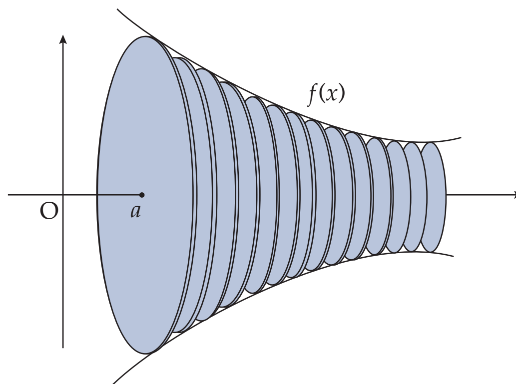
$$X = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + V_3x_3}{V_1 + V_2 + V_3}.$$

Es importante notar que esta misma relación se obtiene independientemente de dónde se ubique el punto $X$, es decir, no es necesario conocer *a priori* su ubicación. De hecho, la relación anterior nos permite determinar su valor y, por tanto, la posición del punto de equilibrio, al cual llamaremos **centro de gravedad** del sistema de los tres discos. Además, obtendremos la misma relación aún si posicionamos el origen del sistema de referencia en otro punto de la recta que conecta los centros, esto puede dar como resultado valores negativos para las abscisas $x_i$.

En general, para un número $n$ de discos de diferentes tamaños $V_1, V_2, \ldots, V_n$, todos muy delgados y posicionados en puntos con abscisas respectivas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el centro de gravedad está dado por

$$X = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + \ldots + V_nx_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}.$$

Ahora, imaginemos que este número de discos es muy grande, como delgadas láminas colocadas una al lado de otra sin dejar un espacio entre dos consecutivas. De esta forma, los bordes de este sistema de láminas circulares describirán aproximadamente una curva.

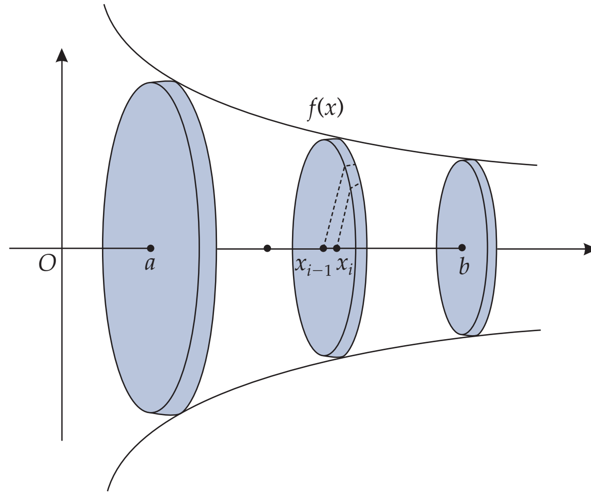



Estos discos forman un cuerpo sólido que podemos considerar de una sola pieza. La fórmula para el centro de gravedad es la misma, pues aun cuando sea muy grande el número de discos, este es finito. Así, tenemos el centro de gravedad de un cuerpo sólido, que si bien no es terso en su superficie, si se puede tomar como aproximación de uno que sea por completo liso. Esta idea nos conduce a la siguiente generalización apoyada en el paso al límite.

Supongamos que tenemos una función $f$ positiva y continua definida en un intervalo $[a, b]$. Tomemos para cada entero positivo $n$, una partición $\wp_n$ del intervalo $[a, b]$ de $n + 1$ puntos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Para cada par de puntos $x_{i-1}$ y $x_i$ de esta partición, consideremos el disco de grosor $x_i - x_{i-1}$ y radio $f(x_i)$.




Entonces, tenemos $n$ discos, cada uno de volumen

$$V_i = (x_i - x_{i-1})\pi f^2(x_i).$$

El centro de gravedad de estos $n$ discos, está dado por

$$X(n) = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \ldots + V_n x_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi x_i f^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi f^2(x_i)}.$$

Si la sucesión de mallas $(\delta_n)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces el volumen del sólido de revolución está dado por

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi f^2(x_i) = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

y también se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi x_i f^2(x_i) = \int_a^b \pi x f^2(x)dx.$$

Por tanto, $X(n)$ tiene límite cuando $n \to \infty$; este es el centro de gravedad del sólido de revolución y está dado por

$$X = \lim_{n\to\infty} X(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi x_i f^2(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\pi f^2(x_i)} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right)\pi x_i f^2\left(x_i\right)}{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right)\pi f^2\left(x_i\right)}.$$

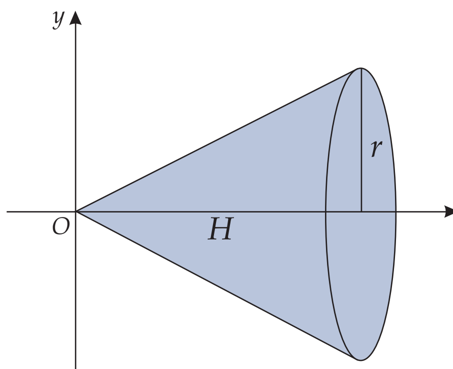
Es decir

$$X = \frac{\int_a^b \pi x f^2(x)dx}{\int_a^b \pi f^2(x)dx} = \frac{\int_a^b x f^2(x)dx}{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Esta es la abscisa del centro de gravedad o centroide del sólido de revolución que se obtiene al rotar la gráfica de la función $f$ alrededor del eje de las abscisas.

## 4.5.1 Centroide de un cono recto de base circular

Un cono de altura $H$ y base circular de radio $r$ se genera mediante la rotación de la gráfica de la función $f(x) = \frac{r}{H}x$ en el intervalo $[0, H]$.




Para este cono, el centroide está dado por

$$X = \frac{\int_0^H \pi x \left(\frac{r}{H}x\right)^2 dx}{\int_0^H \pi \left(\frac{r}{H}x\right)^2 dx}.$$

Es decir

$$X = \frac{\int_0^H x^3 dx}{\int_0^H x^2 dx} = \frac{\frac{1}{4}H^4}{\frac{1}{3}H^3}.$$

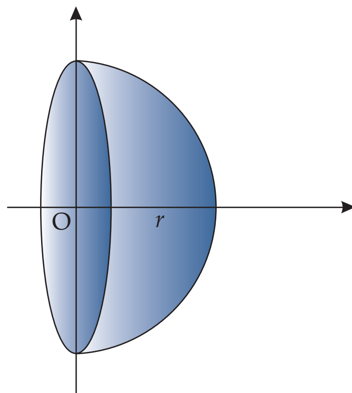
De donde, finalmente, obtenemos

$$X = \frac{3}{4}H.$$

Así que el centroide de un cono depende únicamente de su altura y se encuentra sobre su eje a un cuarto de esta, medida desde la base.

## 4.5.2 Centroide de un hemisferio esférico

Una esfera de radio $r$ se genera mediante la rotación de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ en el intervalo $[-r, r]$. Podemos generar el hemisferio derecho de radio $r$, rotando la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ en el intervalo $[0, r]$.




Usando las mismas ideas de los ejemplos anteriores, obtenemos que la abscisa del centroide de este hemisferio está dada por

$$X = \frac{\int_o^r \pi x(r^2 - x^2)dx}{\int_0^r \pi(r^2 - x^2)dx} = \frac{\int_0^r r^2 x dx - \int_0^r x^3 dx}{\int_0^r r^2 dx - \int_0^r x^2 dx}.$$

Es decir

$$X = \frac{\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4}r^4}{r^3 - \frac{1}{3}r^3}.$$

De donde, finalmente, obtenemos

$$X = \frac{3}{8}r.$$

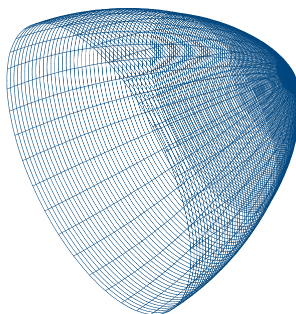
Esto significa que el centroide de un hemisferio de radio $r$, está situado a $\frac{3}{8}$ del radio, medido desde la base circular.

## 4.5.3 Centroide de un paraboloide

Un segmento de paraboloide de altura $H$ y de base circular de radio $R$, es el sólido de revolución generado por la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{x}$$

en el intervalo $[0, H]$.



Por tanto, su centroide está dado por

$$X = \frac{\int_0^H \pi x f^2(x)dx}{\int_0^H \pi f^2(x)dx} = \frac{\int_a^H \pi x \frac{R^2}{H} xdx}{\int_0^H \pi \frac{R^2}{H} xdx}.$$

O sea

$$X = \frac{\int_0^H x^2 dx}{\int_0^H xdx}.$$

De donde, finalmente, obtenemos

$$X = \frac{2}{3}H.$$

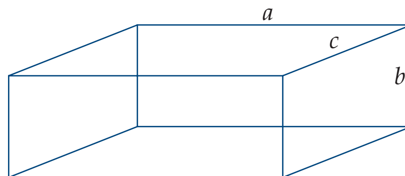
## 4.6 Trabajo realizado para desalojar el líquido de un recipiente

Para concluir este capítulo, ahora vamos a calcular el trabajo que se realiza para vaciar un recipiente lleno de agua. El trabajo es una cantidad física que se refiere a la energía consumida, cuando se aplica una fuerza a un cuerpo para desplazarlo una cierta distancia. La energía empleada o trabajo realizado es igual a lo que resulte de multiplicar la fuerza en newtons por la distancia en metros (en el sistema MKS), así que las unidades del trabajo son Joules $= \text{N} \cdot \text{m} = \dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$.

Así, calcularemos el trabajo para diversos tipos de recipientes. Primero, se calculará el trabajo que se realiza para subir pequeñas cantidades de agua hasta el borde del recipiente; de allí, después el agua caerá por efecto de la gravedad. Dado que esta es de peso específico 1, el peso de cualquier volumen es numéricamente igual al volumen mismo. Veamos algunos ejemplos.

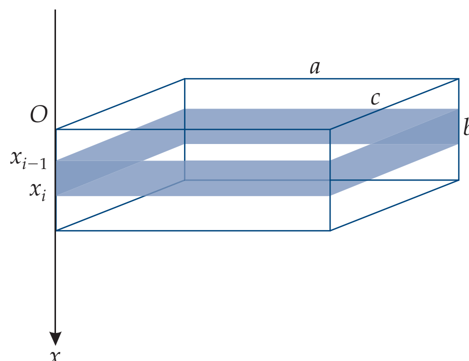
### 4.6.1 Recipiente en forma de prisma recto con base rectangular

Supongamos que el recipiente tiene la forma de un prisma recto de altura $b$ y base un rectángulo de lados $a$ y $c$.




Elijamos un sistema de referencia como el que se ilustra en la figura. Enseguida, para cada entero positivo $n$, tomemos una partición $\wp_n$ del intervalo $[0, b]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$




Sean $x_{i-1}$ y $x_i$ dos puntos de esta partición. Consideremos el volumen de la placa de grosor $x_i - x_{i-1}$. Los lados de la placa son $a$ y $c$, por lo que su volumen es $V_i = (x_i - x_{i-1})ac$. El trabajo realizado para llevar este volumen de agua a la superficie es el producto de su peso, que es numéricamente igual al volumen $V_i$ por la distancia $x_i$ que hay que subir hasta alcanzar el borde del recipiente

$$T_i = (x_i - x_{i-1})acx_i.$$

Por tanto, una aproximación del trabajo total para vaciar el tanque es

$$\mathrm{T} \approx \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})acx_i.$$

Esta sumatoria es una suma de Riemann para la función $f(x) = acx$, así que si la sucesión de mallas $(\delta_n)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, se tiene

$$T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})acx_i = \int_0^b acx\,dx.$$

De esta forma, el trabajo realizado para este recipiente es

$$T = \frac{1}{2}acb^2.$$

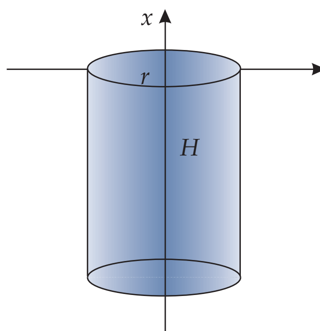
Dado que el volumen del recipiente es $V = abc$, el trabajo realizado para vaciarlo es

$$T = \frac{1}{2}Vb.$$

Es decir, el trabajo que se debe realizar para vaciar el tanque es el peso de todo el volumen por la mitad de la altura del recipiente, lo cual es algo muy razonable.

## 4.6.2 Recipiente cilíndrico

Sea ahora un recipiente cilíndrico de altura $H$ y base de radio $r$.




Procediendo como en los ejemplos anteriores, tomemos particiones $\wp_n$ del intervalo $[0, H]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = H,$$

tal que la sucesión de mallas $(\delta_n)$ tienda a cero. Es fácil mostrar que el trabajo que se realiza al vaciar el recipiente cilíndrico está dado por

$$T = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\pi r^2 x_i = \pi r^2 \int_0^H x\,dx.$$

O sea

$$T = \frac{1}{2}\pi r^2 H^2.$$

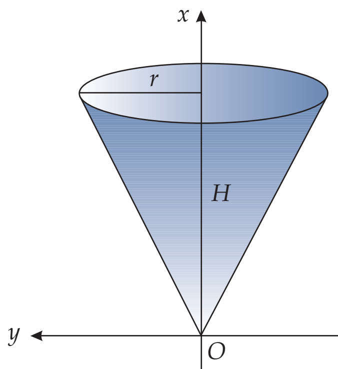
Dado que el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 H$, el trabajo $T$ puede expresarse como

$$T = \frac{1}{2} VH.$$

Como en el ejemplo anterior, esto significa que el trabajo requerido para vaciar el recipiente es igual al que se realiza para trasladar el volumen $V$ una distancia igual a la mitad de la altura.

## 4.6.3 Recipiente cónico

Ahora, supongamos un recipiente cónico de altura $H$ y base circular de radio $r$. Consideremos el sistema de referencia que se ilustra en la siguiente figura.



Tomemos particiones $\wp_n$ del intervalo $[0, H]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = H.$$

Supongamos que la sucesión de mallas $(\delta_n)$ tiende a cero. Entonces, el trabajo que hay que realizar para vaciar el recipiente cónico está dado por

$$\begin{aligned}
T &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\pi r_i^2(H - x_i)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\pi\left(\frac{r}{H}x_i\right)^2(H - x_i)\\
&= \pi\frac{r^2}{H^2}\int_0^H x^2(H - x)\,dx\\
&= \pi\frac{r^2}{H^2}\left(\int_0^H Hx^2dx - \int_0^H x^3dx\right)\\
&= \pi\frac{r^2}{H^2}\left(\frac{1}{3}H^4 - \frac{1}{4}H^4\right).
\end{aligned}$$

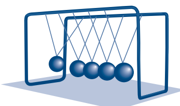
Por tanto,

$$T = \frac{1}{12}\pi r^2 H^2.$$

Recordemos que el volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$, entonces el trabajo obtenido se expresa como

$$T = \frac{1}{4}VH.$$

## 4.7 Problemas y ejercicios



**I.** Realice lo que se le pide.

### Distribución de la riqueza. Curva de Lorenz

**1.** Uno de los modelos matemáticos para describir la distribución de la riqueza y establecer la desigualdad entre pobres y ricos está dada por la *curva de Lorenz*. Esta constituye una función que se halla definida en el intervalo [0, 1] y su valor en $x$ significa que la fracción $x$ de la población que recibe el ingreso más bajo, recibe en conjunto $l(x)$ los ingresos del total de la población. Por ejemplo, si esta función está dada por $l(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$, su valor en $x = 0.2$, que es $l(0.2) = 0.05$, significa que 20% de la población con los más bajos ingresos recibe en conjunto 5% de los ingresos de toda la población. En este modelo matemático de la distribución de la riqueza, el *coeficiente de desigualdad social* se define como:

$$L = 2\int_0^1 [x - l(x)]\,dx.$$

Calcule el coeficiente de desigualdad para la función $l(x) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$.

## Curva de aprendizaje

**2.** Se denomina *curva de aprendizaje* a la función $g(x)$, que permite estimar el número total de horas-hombre empleadas para producir un determinado número de unidades de un producto, considerando el aprendizaje o la experiencia que se adquiere mediante la repetición de producir cada unidad hasta completar una primera cantidad. El número de horas-hombre requeridas para producir $d$ unidades después de producir las primeras $c$ es:

$$T_{hh} = \int_{c}^{c+d} g(x)dx.$$

Por ejemplo, si después de ensamblar 1 000 refrigeradores, la curva de aprendizaje de la planta de obreros es $g(x) = 18x^{-0.165}$, estime el número de horas-hombre empleadas en el ensamblado de 4 000 refrigeradores adicionales.

**3.** El trabajo realizado por un sistema homogéneo simple como resultado de su cambio de volumen o por la presión aplicada en las paredes del sistema, al pasar del estado $A(p_1, V_1, T_1)$ al estado $B(p_2, V_2, T_2)$, es:

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} pdV$$

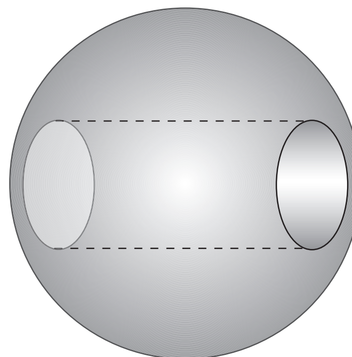
donde $T$ es la temperatura, $p$ la presión y $V$ el volumen. Un gas ideal que realiza una expansión politrópica, cumple la siguiente relación durante del proceso

$$pV^{\gamma} = C$$

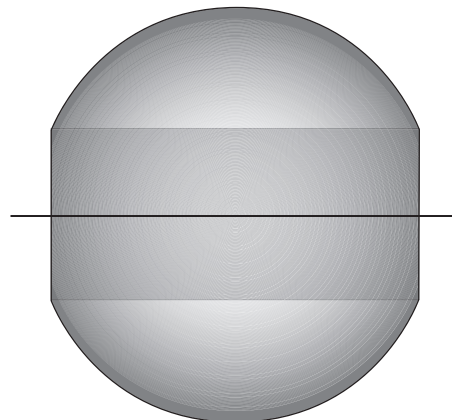
donde $\gamma$ y $C$ son constantes. Un gas ideal también cumple la relación $pV = nRT$, donde $n$ es el número de moles y $R$ una constante denominada *constante universal de los gases*. Demuestre que el trabajo realizado en una expansión politrópica de un gas ideal con un cambio de temperatura de $T_1$ a $T_2$ es

$$W_{AB} = nR\frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1}.$$

**4.** Un obrero prepara cierto tipo de arandelas metálicas perforando esferas que tienen un radio de 4.5 centímetros. La perforación es cilíndrica, atraviesa por completo la esfera, y el eje del cilindro corresponde a uno de los ejes de la esfera.

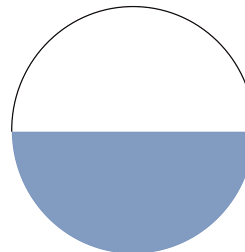


De perfil, la pieza se observa así:



Donde el área sombreada, corresponde al hueco interno. Si el radio de la perforación cilíndrica es de 3 centímetros, calcule el volumen de la pieza.

**5.** Considere un ducto circular de 2 metros de diámetro que conduce agua hasta la mitad de su altura (véase figura).



Calcule la presión que el agua ejerce sobre una compuerta que cierra el ducto.

## Un circuito RC

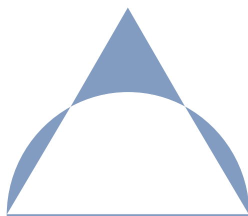
**6.** En un circuito eléctrico con un resistor $R$ y un capacitor $C$ en serie, la intensidad de corriente $I$ que pasa por el capacitor en el instante $t$ está dada por $I(t) = \dfrac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$, donde $V$ es el voltaje aplicado. Dado que la intensidad de corriente es $I = dQ/dt$:

*a*) Calcule la carga en el capacitor al tiempo $t$.

*b*) Calcule la carga máxima del capacitor.

*c*) ¿Cuál es la carga al tiempo $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 2}{RC}$?

**7.** La figura siguiente es un triángulo equilátero de lado 2 y una semicircunferencia con un diámetro apoyado en la base. Calcule el área sombreada.



## Distancia recorrida por un móvil

**8.** Si se conoce la velocidad como función del tiempo de un objeto moviéndose en línea recta, es posible conocer la diferencia entre las posiciones al tiempo inicial $t_0$ y al tiempo final $t_f$.

$$\int_{t_0}^{t_f} v(t)dt = x(t_f) - x(t_0).$$

En particular, si en $t_0$ la posición es $x = 0$, es posible conocer la posición al tiempo final $t_f$.

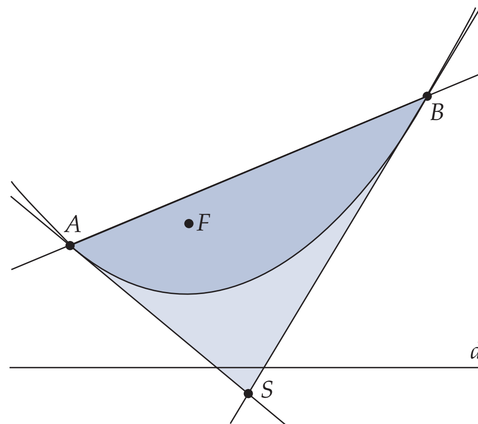
*a*) Una pelota se mueve en el extremo de un resorte de acuerdo con la función velocidad $v(t) = -6\ \text{sen}(3t)$. Determine la posición en los instantes $t = 3\pi$ y $t = \dfrac{3}{2}\pi$.

*b*) Un objeto después de 20 minutos se encuentra en el kilómetro 4 de un tramo recto, su velocidad a partir de ese instante está dada por la función $v(t) = t^3 - 4t^2 + 5$, calcule la posición del objeto en cualquier instante posterior.

**9.** La velocidad de un cuerpo está dada por la expresión $v = \sqrt{1+t}\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. Halle la distancia recorrida por el cuerpo en los primeros 10 segundos después de haber iniciado el movimiento.

## Cálculo de áreas

**10.** Considere la parábola $y = x^2 - 6x + 17$ y dos rectas tangentes a la misma en los puntos $A$ y $B$, pertenecientes a la parábola. Sea $S$ el punto de intersección de las tangentes.




*a*) Calcule $P_1$, el área de la región comprendida entre la parábola y la recta que pasa por los puntos $A = (1, 12)$ y $B = (7, 24)$ (sombreado oscuro).

*b*) Calcule $T_1$, el área del triángulo con vértices en $A = (1, 12)$, $B = (7, 24)$ y el punto $S$ (sombreado claro).

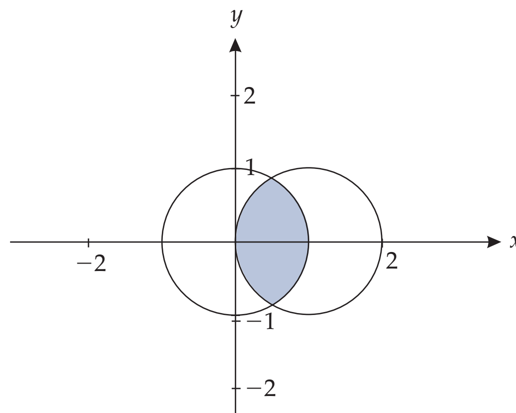
*c*) Calcule $P_2$, el área de la región entre la parábola y la recta que pasa por los puntos $A = (2, 9)$ y $B = (10, 57)$ (sombreado oscuro).

*d*) Calcule $T_2$, el área del triángulo con vértices en $A = (2, 9)$, $B = (10, 57)$ y el punto $S$ (sombreado claro).

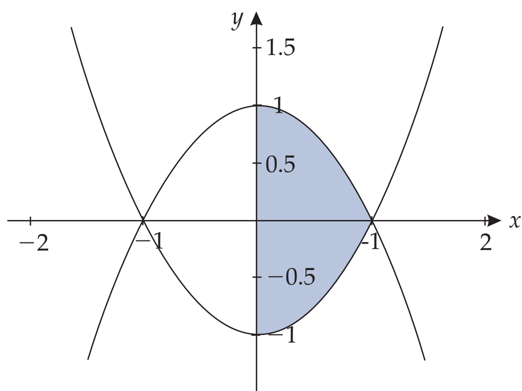
*e*) Obtenga los cocientes $\dfrac{P_1}{T_1}$ y $\dfrac{P_2}{T_2}$. ¿Qué puede conjeturar?

**11.** El interior del círculo $x^2 + y^2 = 8$ está dividido en dos regiones por la parábola $y = \dfrac{x^2}{2}$. Halle sus áreas.

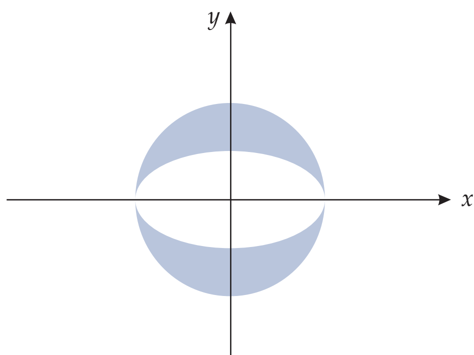
**12.** Determine el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.



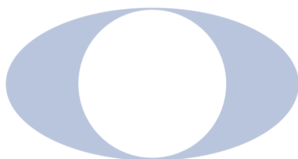

**13.** Halle el área de la región determinada por la intersección de las parábolas $y = x^2 - 1$ y $y = -x^2 - 1$ y el semiplano $x \geq 0$.



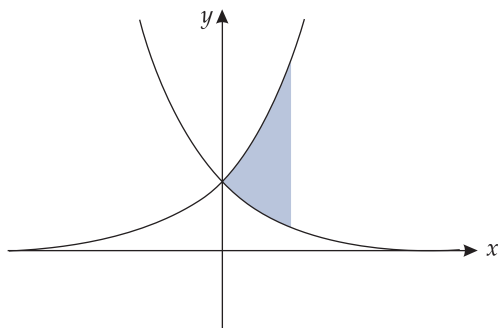

**14.** Dentro de un círculo de radio $a$, se construye una elipse cuyo eje mayor coincide con uno de los diámetros del círculo y el menor es igual a $2b$. Calcule el área de la región comprendida entre la circunferencia y la elipse.



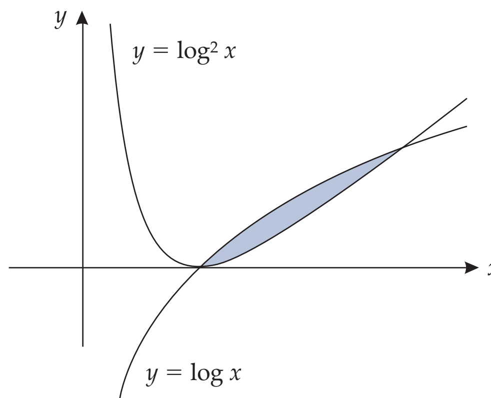

**15.** Dentro de una elipse de eje mayor $2a$ y eje menor igual a $2b$, se construye un círculo de radio $b$. Halle el área de la región comprendida entre la elipse y el círculo.



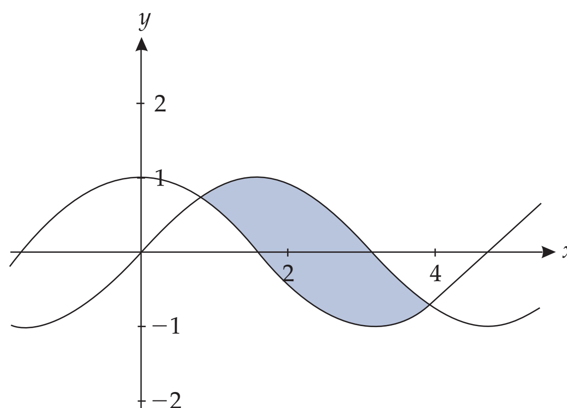
**16.** Calcule el área de la figura limitada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.




**17.** Calcule el área de la figura limitada por las líneas $y = \log x$ y $y = \log^2 y$.

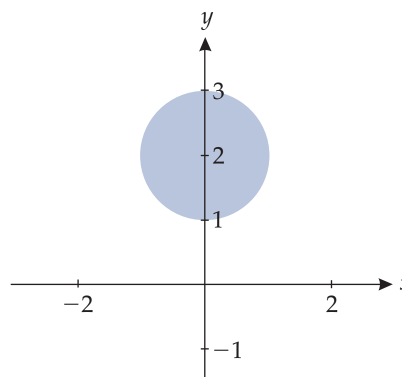


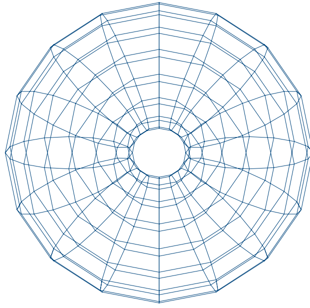

**18.** Determine el área de la figura limitada por las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, entre los dos primeros puntos de intersección.



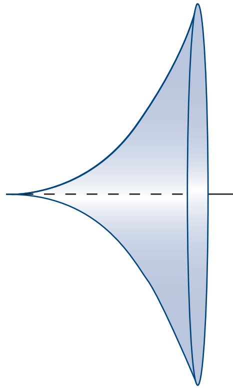

## Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

**19.** Calcule el volumen de una dona sólida, cuyo radio exterior mide 2 centímetros y el radio interior mide 1 centímetro. Esta dona se puede generar rotando alrededor del eje $x$, la región determinada por círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

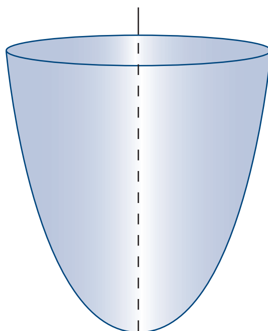




**20.** Al rotar la región comprendida entre la gráfica de la parábola cúbica $f(x) = x^3$ y el eje de las abscisas en el intervalo $[0, b]$ alrededor del eje $x$, se obtiene un sólido cuya superficie es una especie de trompeta. Calcule el volumen de este sólido de revolución.

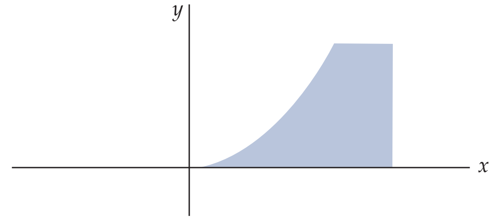


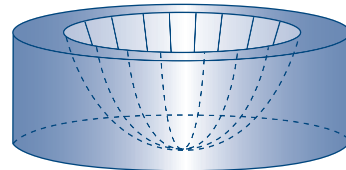
**21.** Calcule el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región de la parábola cúbica $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ alrededor del eje $y$.



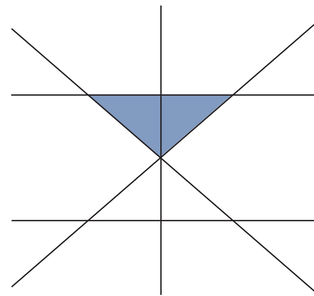
**22.** Calcule el volumen del sólido de revolución que es una especie de cenicero y que se genera al rotar alrededor del eje de las ordenadas, la región bajo la gráfica de la función

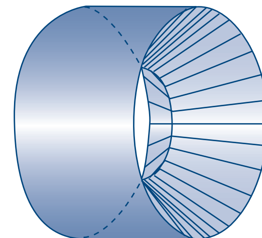
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 1.25 \end{cases}$$



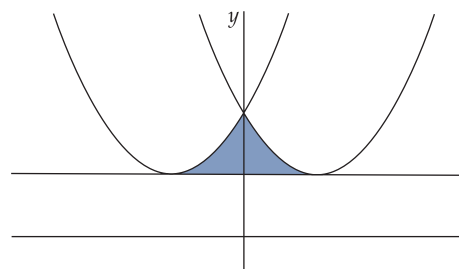



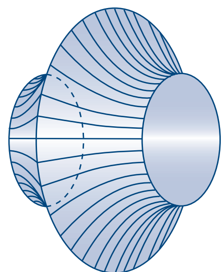
**23.** Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar alrededor del eje de las abscisas, la región acotada comprendida entre las tres rectas $y = x + 1$, $y = -x + 1$ y $y = 2$.





**24.** Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar alrededor del eje de las abscisas, la región acotada comprendida entre las tres curvas $y = (x - 1)^2 + 1$, $y = (x + 1)^2 + 1$ y $y = 1$.

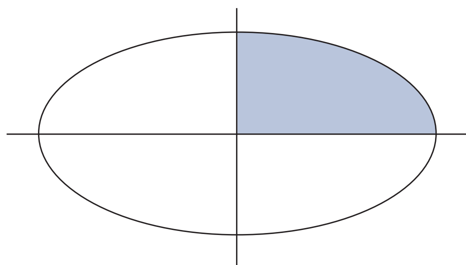




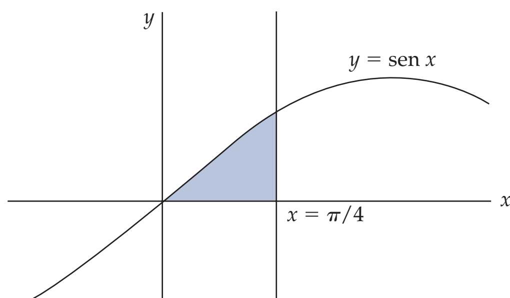
## Centro de gravedad de sólidos

**25.** El radio de la base mayor de un cono truncado es de 6 centímetros y el radio de la base menor es de 3 centímetros. Si la altura del cono es de 8 centímetros, halle su centro de gravedad.

**26.** Halle el centro de gravedad de la mitad del sólido de revolución, que se obtiene al rotar alrededor del eje de las abscisas, la superficie de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, correspondiente al primer cuadrante.



**27.** Halle el centro de gravedad del sólido que se genera al rotar alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = a \operatorname{sen} x$, la recta $x = \frac{\pi}{4}$ y el eje $x$.




## Longitud de arco

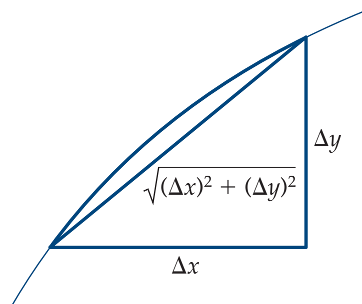
La longitud del arco de la gráfica de una función derivable $f(x)$, con derivada continua en un intervalo $[a, b]$, puede calcularse como sigue:
tómese una partición del intervalo $[a, b]$

$$\wp_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

y constrúyase la poligonal que se obtiene al unir cada dos puntos consecutivos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cada uno de estos segmentos es una cuerda cuya longitud está dada por

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} =$$

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$




La suma de las longitudes de estas cuerdas es

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

la cual es una aproximación de la longitud de la curva que tiene por extremos los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Por el teorema del valor medio aplicado a cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, existe $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(t_i)$, con lo que la suma anterior se escribe como

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(t_i)^2} \Delta x_i .$$

Esta es una suma de Riemann para la función $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ en el intervalo $[a, b]$. Dado que $f'$ es continua en $[a, b]$, tomando una sucesión de particiones $(\wp_n)$ de manera que la sucesión de mallas tienda a cero, estas sumas de Riemann tienden a la integral

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

la cual, por definición, es la longitud del arco de la curva comprendida entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

**28.** Verifique la fórmula de la circunferencia de un círculo de radio $r$, calculando la longitud de la curva correspondiente a la gráfica de la función

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ en el intervalo $[-r, r]$, o bien hallando la longitud del cuarto de círculo correspondiente a la gráfica en el intervalo $[0, r]$.

**29.** Obtenga la integral correspondiente a la longitud de la elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Realice el cálculo para un cuadrante. Transforme la integral obtenida mediante el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} \theta$. De esta forma obtendrá una integral de la forma

$$L = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen} \theta}\, d\theta.$$

No intente calcular esta integral, no es posible obtener su valor mediante el teorema fundamental del cálculo y usando funciones elementales. Este tipo de integrales se llaman integrales elípticas.

**30.** Un cable cuelga entre dos postes que se hallan separados uno del otro, una distancia de 0.8 metros. La forma del cable se ajusta a una catenaria con ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{2\gamma}[\cosh(\gamma(2x - 0.8)) - \cosh(0.8\gamma)]$$

donde $\gamma = 1.478$. Obtenga la longitud del cable entre los postes.

**31.** Halle la longitud del arco de la curva $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, comprendido entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

**32.** Halle la longitud de arco de la catenaria general $f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, entre los puntos $(0, a)$ y $(x, f(x))$.

**33.** Halle la longitud del arco de la curva $f(x) = 4x - x^2$, entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$.

**34.** Halle la longitud del arco de la curva $f(x) = \log(\sec x)$, comprendida entre los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{\pi}{3}, \log 2)$.

**35.** Halle la longitud del arco de la curva $f(x) = \log\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, comprendida entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

## Momento de inercia y centroide de una curva

El momento de inercia de una masa puntual respecto a un eje de rotación es igual al producto de la masa por el cuadrado de su distancia al eje. Para un alambre de masa $m$, de densidad uniforme y de espesor muy pequeño, cuya forma corresponde a la gráfica de una función $f(x)$, derivable y con derivada continua entre los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x))$, su momento de inercia respecto al eje de las abscisas es la integral de las diferenciales de masa (masa de los diferenciales de longitud de arco) por los cuadrados de sus distancias al eje; es decir, está dado por

$$M_x = \frac{m}{L}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx.$$

En esta fórmula, $L$ es la longitud del alambre, por lo que $\frac{m}{L}$ es su densidad. De forma similar, el momento de inercia respecto al eje de las ordenadas, es,

$$M_y = \frac{m}{L}\int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

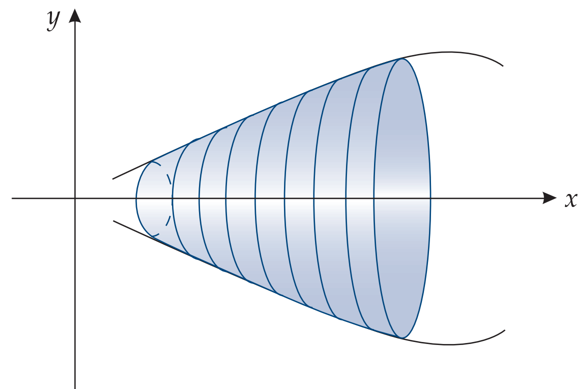
El centroide del alambre se encuentra en el punto

$$C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

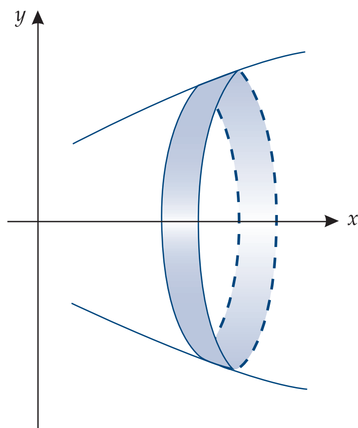
**36.** Calcule el centroide de una semicircunferencia que es la gráfica de la ecuación $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

## Superficie de revolución

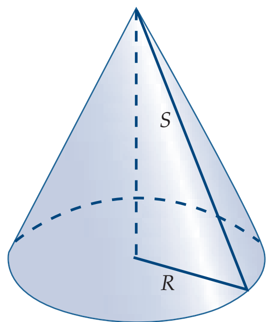
Supongamos que se tiene una función $f(x) \geq 0$ en un intervalo, cuya gráfica rotamos alrededor del eje de las abscisas, para obtener una superficie que llamaremos *superficie de revolución*.




El área de esta superficie se obtendrá mediante una integral que resultará de tomar el límite de sumas que serán aproximaciones del área en cuestión, construidas con áreas de conos truncados.



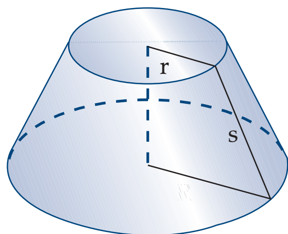

Recordemos que el área lateral de un cono circular recto, con base de radio $R$ y generatriz $S$ está dada por $\frac{1}{2}pS$, donde $p = 2\pi R$ es el perímetro de la base.




Así que el área de este cono queda como $\pi RS$.

**37.** Considere un cono circular recto truncado, con radios de las bases $R$ y $r$, respectivamente, y generatriz $s$. Muestre que el área lateral está dada por

$$A = \pi(R + r)s$$




## Área de una superficie de revolución

Sea $f$ una función no negativa y continua en un intervalo $[a, b]$ y sea

$$\wp_n: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

una partición del intervalo $[a, b]$. Construyamos la poligonal que se obtiene al unir dos puntos consecutivos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cada uno de estos segmentos es una cuerda, cuya longitud

$$s_i = \Delta x_i\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ y $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, es la generatriz de un cono truncado de radios $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$, que se obtiene al rotar la cuerda alrededor del eje $x$. La superficie lateral del cono truncado está dada por

$$A_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))s_i = \pi(f(x_i) + f(x_{i+1}))\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i.$$

Por el teorema del valor medio, para cada $i$, existe $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tal que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(t_i).$$

Por otra parte, dado que $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$ es un número que se encuentra entre los valores $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$, se sigue del teorema del valor intermedio que existe $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, tal que $f(\xi_i) = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$. Así que el área $A_i$ se escribe como

$$A_i = 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'(t_i)^2}\ \Delta x_i.$$

Entonces, la suma de las áreas de todos los conos truncados es

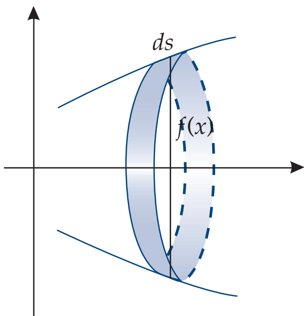
$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + f'(t_i)^2}\ \Delta x_i.$$

Esta no es una suma de Riemann, sin embargo, usando la continuidad uniforme, pruebe que cuando la sucesión de mallas tiende a cero esta sumatoria tiende a

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx.$$

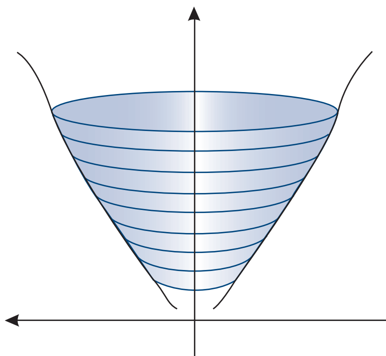
Por definición, esta integral es el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la gráfica de $f$ en el intervalo $[a, b]$, alrededor del eje $x$. Una manera de recordar esta integral es interpretando

el integrando como la diferencial de área lateral de un cono, cuya generatriz es el elemento diferencial de arco $ds = \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$ y radio $f(x)$.




Si $f$ es una función que está definida en los reales $x \geq 0$ y es creciente o decreciente, obtenemos una superficie de revolución al girar la gráfica alrededor del eje $y$. De manera análoga, se obtiene la fórmula para el área de esta superficie:

$$A = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$



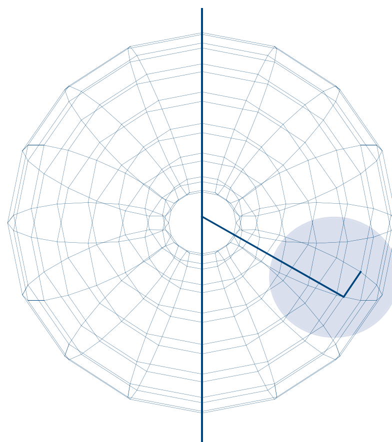
**38.** Calcule el área de la superficie esférica de radio $r$, rotando el semicírculo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ alrededor del eje $x$.

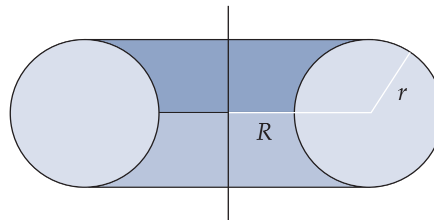
**39.** Calcule el área de la superficie de revolución del ejercicio 20, que es una especie de trompeta, que se obtiene al rotar la parábola cúbica $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, b]$ alrededor del eje $x$.

**40.** Calcule el área del paraboloide de revolución del ejercicio 21, que se obtiene al rotar la parábola cúbica $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$ alrededor del eje $y$.

**41.** Obtenga el área generada por una rotación completa alrededor del eje $y$ del arco entre $x = 0$ y $x = 3$, definido por $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

**42.** En una fábrica de donas, se requiere estimar cuánto chocolate debe comprarse para recubrir 1 000 donas. Con el fin de calcular la cantidad de recubrimiento que se necesita para cada dona, el requerimiento debe hacerse bajo el supuesto de que el chocolate que se use será proporcional al área cubierta. Considere cada dona como una superficie que se genera al rotar un círculo alrededor de un eje (véase figura), tal superficie recibe el nombre de *toro*. El radio menor del toro es el radio del círculo y el radio mayor es la distancia del centro del círculo al eje de rotación. Suponga que el radio menor es de $r = 2$ cm y el radio mayor es de $R = 6$ cm.






Si solo la mitad superior de la dona tiene recubrimiento de chocolate, calcule el área a recubrir.

**43.** Halle el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la parábola $y^2 = 4px$ alrededor del eje de las abscisas desde el vértice hasta el punto cuya abscisa es $x = 3p$.

**44.** Calcule el área de la superficie de revolución del arco de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, comprendido entre $x = 0$ y $x = \pi$, alrededor del eje de las abscisas.

**45.** Pruebe que el área de la superficie de revolución que se genera al rotar un arco de la gráfica de una curva es igual al producto de la longitud del arco por la circunferencia del círculo recorrido por el centroide del arco.

## Trabajo realizado por una fuerza

Si una fuerza constante $F$ se aplica a un cuerpo y lo desplaza una distancia $d$, el *trabajo* realizado por esta fuerza es, por definición, el producto $Fd$. Si la fuerza se mide en newtons (N) y la distancia en metros (m), el trabajo se mide en joules. Si la fuerza es variable y depende de la posición en la que se encuentra el cuerpo, el trabajo se calcula mediante una integral, que es el límite de las sumas de los trabajos realizados en pequeños desplazamientos. Específicamente, si $F(x)$ es la fuerza, que depende de la posición $x$, al desplazarse el cuerpo a lo largo de una línea recta desde la posición $x_1$ a la posición $x_2$, el trabajo realizado es

$$W_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx.$$

**46.** Una pelota se encuentra en el extremo de un resorte que, de acuerdo con la ley de Hooke, ejerce una fuerza sobre la pelota dada por $F(x) = -kx$, donde $k$ es la constante de Hooke del resorte. Si el resorte es de constante $k = 40\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ y se estira desde la posición de equilibrio $x = 0$ a la posición $x = 3$, calcule el trabajo realizado al estirar el resorte.

**47.** Un resorte tiene normalmente una longitud de 1 metro. Una fuerza de 100 N lo comprime 0.1 metros, es decir bajo esta fuerza compresora el resorte tiene una longitud de 0.9 metros. ¿Cuántos joules de trabajo se realizan al comprimirlo hasta la mitad de su longitud normal? ¿Cuál es la longitud del resorte cuando ya se han realizado 20 joules de trabajo?

**48.** Una partícula se mueve a lo largo del eje $x$ mediante una fuerza impulsora $f(x) = 3x^2 + 4x$ N. Calcule cuántos joules de trabajo se realizan con esa fuerza para trasladar la partícula

*a*) desde $x = 0$ hasta $x = 7$.
*b*) desde $x = 2$ hasta $x = 7$.

**49.** Una esfera sólida de radio $R$ y de peso específico 1 está sumergida en el agua de modo que su superficie hace contacto con la superficie del agua. Calcule el trabajo que ha de ser realizado para sacar la esfera del agua.

**50.** Un cable de 20 m de longitud y 4 kg de masa por metro cuelga por su propio peso. En la parte superior está atado a un carrete. Calcule el trabajo que se realiza al enrollar 10 metros de cable.

# CAPÍTULO 5

# SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES



# 5.1 El concepto de sucesión de funciones

En palabras simples, una **sucesión de funciones** es toda colección ordenada de funciones con un dominio común

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

Los tres puntos significan que la lista continúa sin finalizar. A cada una de las funciones $f_n$ la llamaremos **término** o elemento de la sucesión.

En una sucesión de funciones, como en el caso de sucesiones de reales, es importante destacar que las funciones están ordenadas, cada función término de la sucesión tiene una posición que la distingue de las otras funciones. Una misma función puede aparecer en dos posiciones diferentes, razón por la cual se consideran términos diferentes. Otra característica de las sucesiones es que se trata de una lista infinita, es infinita como lista no como colección de funciones; la colección puede ser finita, incluso puede consistir de una sola función. Estas sucesiones reciben el nombre especial de sucesiones constantes, estas sucesiones lucen así

$$f, f, f, \ldots$$

En términos un tanto más formales, tener definida una sucesión de funciones quiere decir que para cada natural $n$ tenemos definida una función $f_n$ y que todas estas funciones tienen un dominio común.

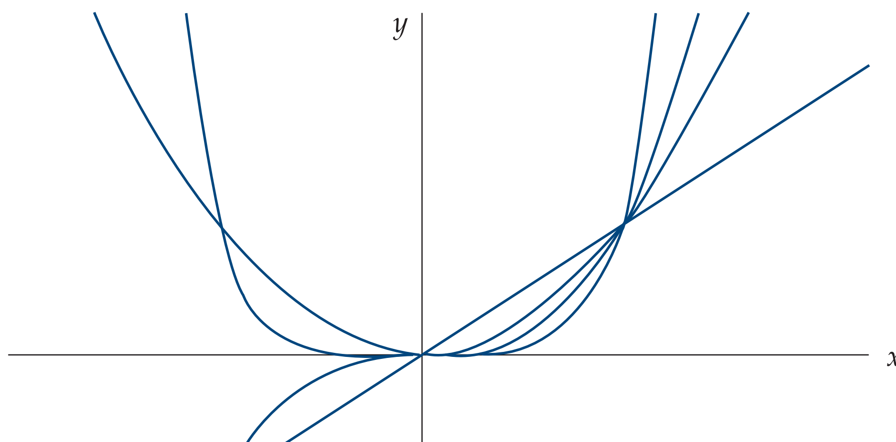
Una diferencia entre las sucesiones de reales y las sucesiones de funciones es la visualización gráfica para estas últimas. A continuación damos algunos ejemplos de sucesiones, acompañadas de las gráficas de algunos de sus términos.

### Ejemplo 1

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f_n(x) = x^n$$

En la figura de abajo se muestran las gráficas de $f_1, f_2, f_3$ y $f_8$



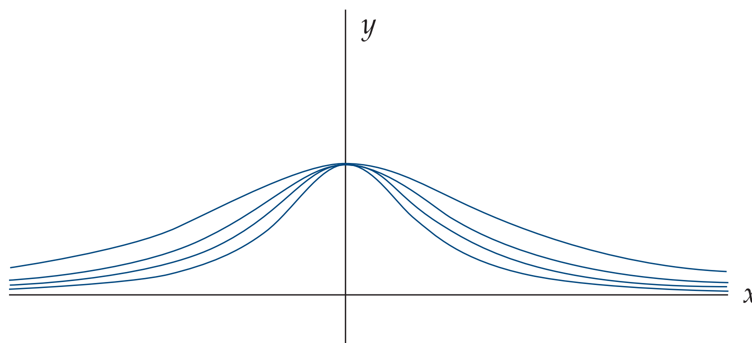
Se invita al lector a que identifique cada una de las gráficas.

### Ejemplo 2

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

Todas las funciones de esta sucesión toman el valor 1 en $x = 0$ son positivas en cada punto de su dominio.

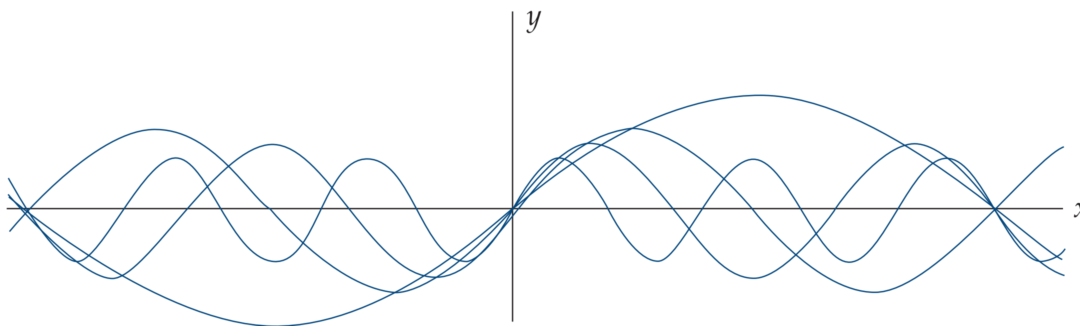



### Ejemplo 3

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

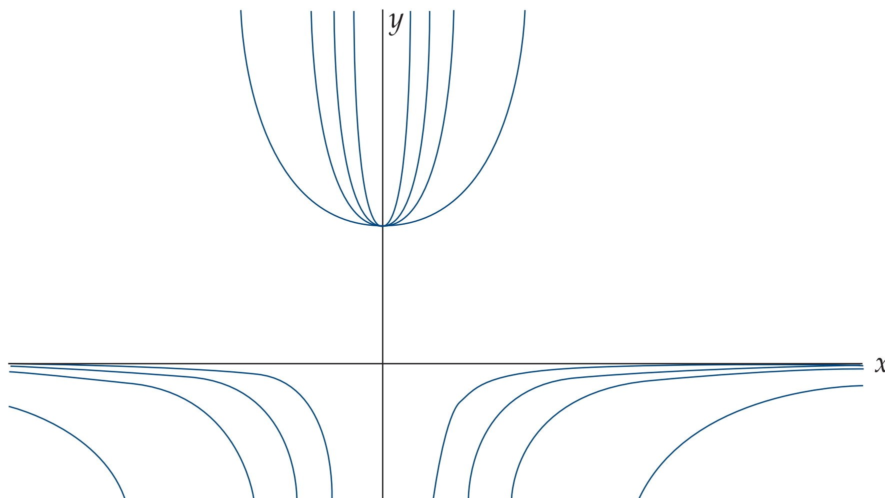
Cada función $f_n$ toma el valor cero en $x = 0$. Además $\left|f_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{n}$ para cada natural $n$. Para $n$, fija, la función $f_n$ es periódica, de periodo $\dfrac{2\pi}{n}$.




### Ejemplo 4

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : \mathbb{R} \left| \{1/n, -1/n\} \right. \to \mathbb{R}$ definida como

$$f_n(x) = \frac{1}{1 - n^2x^2}$$




Para cada natural $n$, el dominio $f_n$ consiste de todos los reales, excepto $\frac{1}{n}$ y $-\frac{1}{n}$ que son los reales donde se anula el denominador de $\frac{1}{1-n^2x^2}$.

Las funciones $f_n$ definidas en los ejemplos 1 al 3 determinan una sucesión de funciones pero no así las del ejemplo 4, ya que en este caso las funciones $f_n$ no tienen un dominio común. Podríamos definir una sucesión de funciones sin la condición de que todas ellas tuviesen el mismo dominio; sin embargo, pedir esta condición nos permitirá enunciar los principales resultados sobre sucesiones de funciones sin necesidad de hacerla explícita.

## Notación

Como en el caso de las sucesiones de números reales, para representar una sucesión de funciones utilizaremos los paréntesis para resaltar el hecho de que se trata de una colección ordenada.

$$(f_1, f_2, f_3, \ldots).$$

Los paréntesis desempeñan el mismo papel que juegan los paréntesis en las parejas ordenadas $(a, b)$ y en las ternas ordenadas $(x_1, x_2, x_3)$. Los paréntesis permiten distinguir los pares y ternas ordenadas de los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{x_1, x_2, x_3\}$ respectivamente. Los tres puntos suspensivos indican que el ordenamiento es infinito.
La representación anterior también la abreviaremos con la notación

$$\left(f_n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

O bien con cualquiera de las notaciones más simples

$$\left(f_n\right)_{n\geq 1} \text{ o bien, } \left(f_n\right).$$

De manera similar a las sucesiones de reales, podemos concebir las sucesiones de funciones como funciones, pero ahora de naturaleza más compleja. Si bien el dominio de una función tal es el conjunto de los números naturales, el contradominio es un conjunto de funciones con un dominio común y un contradominio común. Por ejemplo, si $D$ es el dominio y $X$ el contradominio de cada término de la sucesión, entonces la sucesión de funciones podemos concebirla como una función

$$S:\mathbb{N}\to\{f \mid f: D\to X\}$$

tal que $S(n) = f_n$. Así que propiamente la sucesión sería la función $S$ y valdría escribir $S = \left(f_n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(f_n\right)$. Sin embargo, para nuestro estudio será suficiente entender las sucesiones de funciones como una lista infinita de funciones.

## 5.2 Convergencia puntual. Límite puntual de una sucesión de funciones

De manera similar al caso de sucesiones de reales, también tenemos conceptos de convergencia y de límite de una sucesión de funciones; pero dado que ahora los elementos de la sucesión son funciones, el concepto de convergencia no solamente será más complejo, sino que habrá más de un concepto de convergencia. Aquí estudiaremos dos de estos, cada uno de los conceptos de convergencia tiene un significado geométrico relacionado con el comportamiento de las gráficas de las funciones, términos de la sucesión, sobre el cual será importante reflexionar en su momento. El concepto de convergencia más simple es el que llamaremos convergencia puntual de una sucesión.

Supóngase $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n: D \to \mathbb{R}$, donde $D \subset \mathbb{R}$ es el dominio común de las funciones $f_n$. Entonces para cada $x \in D$ tenemos definida una sucesión de reales $(f_n(x))$. A esta sucesión podemos aplicarle todas nuestras definiciones y resultados estudiados en el capítulo 4 sobre sucesiones de reales del libro de *Cálculo diferencial* de este mismo autor y de ahí generar definiciones y resultados para las sucesiones de funciones. Esto es lo que haremos a continuación.

### Definición

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n: D \to \mathbb{R}$. Supóngase que **para cada** $x \in D$ la sucesión de reales $(f_n(x))$ converge. Si para cada $x \in D$ hacemos

$$f\left(x\right) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

entonces diremos que la sucesión $(f_n)$ **converge puntualmente** a la función $f: D \to \mathbb{R}$. y que $f$ es el **límite puntual** de la sucesión $(f_n)$.

De acuerdo con la definición de límite de una sucesión de reales, la definición anterior se traduce como:

### Definición

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n: D \to \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)$ **converge puntualmente** a una función $f: D \to \mathbb{R}$ o que $f$ es el **límite puntual** de la sucesión $(f_n)$ si para cada $x \in D$ ocurre que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

para todo natural $n \geq N$.

De las propiedades de las sucesiones de reales se sigue lo siguiente:

### Teorema

Sean $(f_n)$ y $(g_n)$ dos sucesiones de funciones $f_n$, $g_n: D \to \mathbb{R}$ que convergen puntualmente a las funciones $f$ y $g$ respectivamente. Entonces:

a) $(f_n) + (g_n) = (f_n + g_n)$ converge puntualmente a $f + g$.
b) Si $\lambda$ es cualquier real, $\lambda(f_n) = (\lambda f_n)$ converge puntualmente a $\lambda f$.
c) Si $h$ es cualquier función $D \to \mathbb{R}$, $h(f_n) = (hf_n)$ converge puntualmente a $hf$.
d) $(f_n)(g_n) = (f_n g_n)$ converge puntualmente a $fg$.

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

## Ejemplo 5

Consideremos la sucesión del ejemplo 1 de este capítulo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ está definida como

$$f_n(x) = x^n.$$

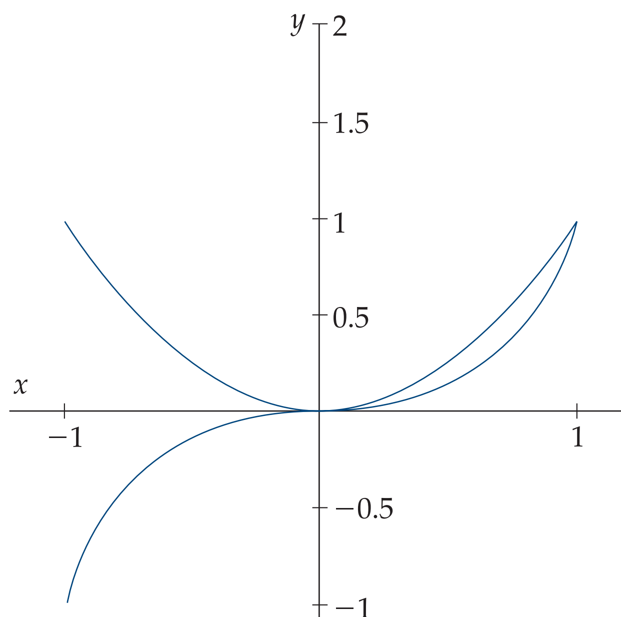
Sabemos que si $|x|<1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para toda $-1 < x < 1$. Por otra parte dado que $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ para $x = 1$. Entonces $(f_n(x))$ converge para toda $x \in (-1, 1]$. Por otra parte, dado que la sucesión $(-1)^n$ no converge y que $x^n$ tampoco converge para $x > 1$ y para $x < -1$, entonces $(f_n(x))$ diverge para toda $x$ fuera del intervalo $(-1, 1]$. Entonces la sucesión $(f_n)$ no converge puntualmente a alguna función $f$.

## Ejemplo 6

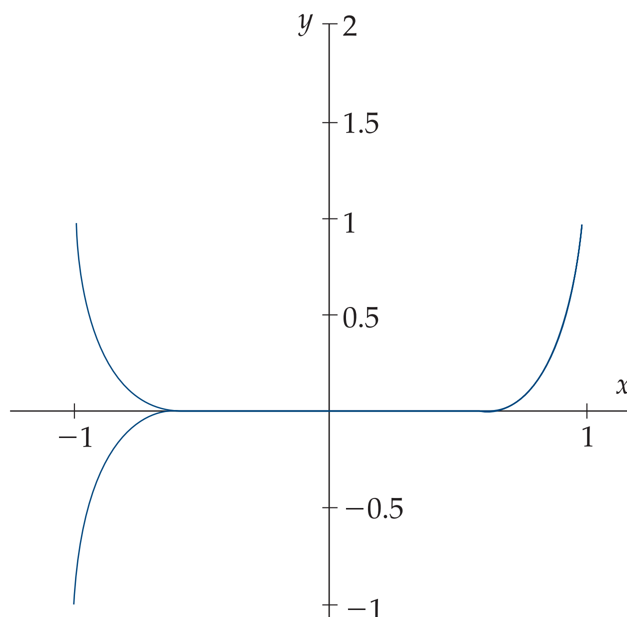
Si redefinimos la sucesión $(f_n)$ del ejemplo 5, haciendo $f_n:(-1, 1]\to\mathbb{R}$ pero manteniendo $f_n(x) = x^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que la sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1<x<1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestran las gráficas de algunas funciones de la sucesión




Gráficas de $f_2(x)=x^2$ y $f_3(x)=x^3$




Gráficas de $f_{10}(x)=x^{10}$ y $f_{11}(x)=x^{11}$

### Ejemplo 7

Consideremos la sucesión del ejemplo 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

Para $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 1$ para todo natural $n$, por tanto $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Por otra parte para $x \neq 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + nx^2} = 0$$

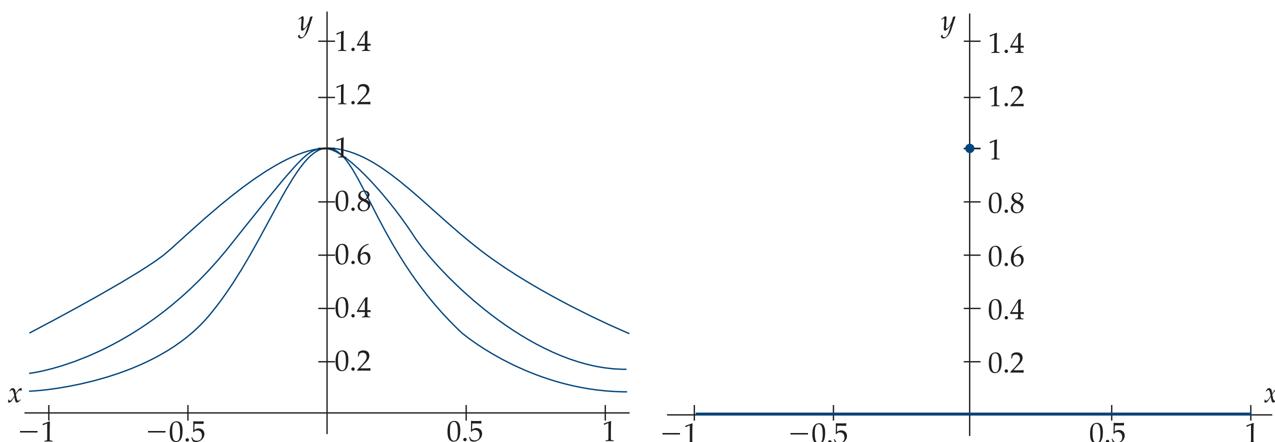
Por tanto la sucesión $(f_n)$ converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Es decir

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ para toda } x \in \mathbb{R}.$$

En la figura de abajo se muestran las gráficas de las funciones $f_1(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $f_{10}(x) = \dfrac{1}{1 + 10x^2}$ y $f_{20}(x) = \dfrac{1}{1 + 20x^2}$. La función límite toma el valor cero en todos los reales excepto en $x = 0$ donde toma el valor 1.




### Ejemplo 8

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = x(1 - x^2)^n.$$

Probemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Ya hemos probado en la sección 4.8.2 del libro de Cálculo Diferencial que si $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0.$$

Usemos este hecho para probar que para toda $x \in [0,1]$, se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Consideremos primero los casos particulares $x = 0$ y $x = 1$.

Como $f_n(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces obviamente $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ cuando $x = 0$.

Como también $f_n(1) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ cuando $x = 1$.

Ahora sea $0 < x < 1$. Tenemos entonces $0 < 1 - x^2 < 1$. Hagamos $\alpha = 1 - x^2$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \lim_{n\to\infty} (1 - x^2)^n = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x(1 - x^2)^n = 0.$$

Que es lo que deseábamos probar. Esto significa que la sucesión de funciones $f_n(x) = x(1-x^2)^n$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0,1]$, es decir

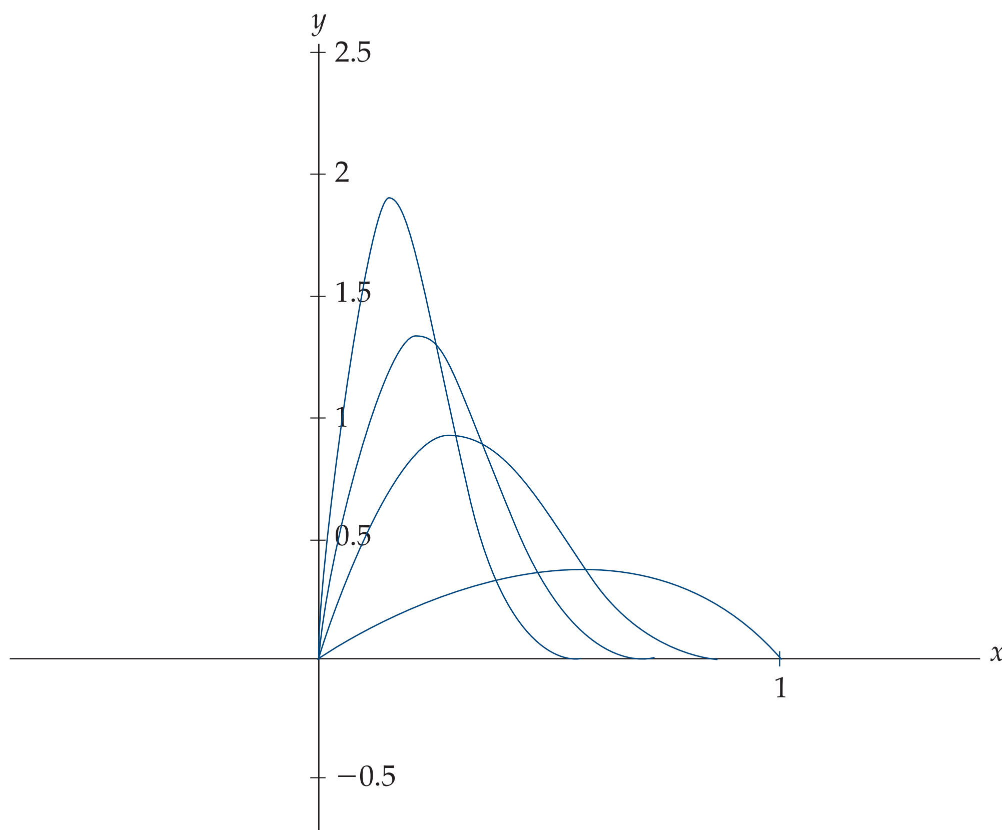
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ para toda } x \in [0,1].$$

### Ejemplo 9

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n:[0,1] \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n.$$

Estas funciones son similares a las del ejemplo 8, pero como veremos más adelante tienen un comportamiento más interesante. En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones $f_1(x) = x(1-x^2)$, $f_5(x) = 5x(1 - x^2)^5$, $f_{10}(x) = 10x(1-x^2)^{10}$ y $f_{20}(x) = 20x(1-x^2)^{20}$



Probemos que en este caso también se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, pero ahora utilizaremos el resultado de la sección 4.8.3 en la cual se establece que si $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0.$$

Como en el ejemplo 8, para los casos particulares $x=0$ y $x=1$ se cumple trivialmente $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ahora sea $0 < x < 1$. Tenemos $0 < 1 - x^2 < 1$. Hagamos $\alpha = 1 - x^2$, entonces por el resultado de la sección 4.8.3 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha^n = \lim_{n\to\infty} n(1-x^2)^n = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n = 0$$

Que deseábamos probar, esto significa que la sucesión de funciones $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0,1]$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ para toda } x \in [0,1].$$

### Ejemplo 10

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \text{ para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Como para $|x| < 1$ se tiene $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = 0 \text{ para toda } -1 < x < 1.$$

Por otra parte, para $x = 1$ y $x = -1$ se tiene $f_n(x) = \frac{1}{2}$.

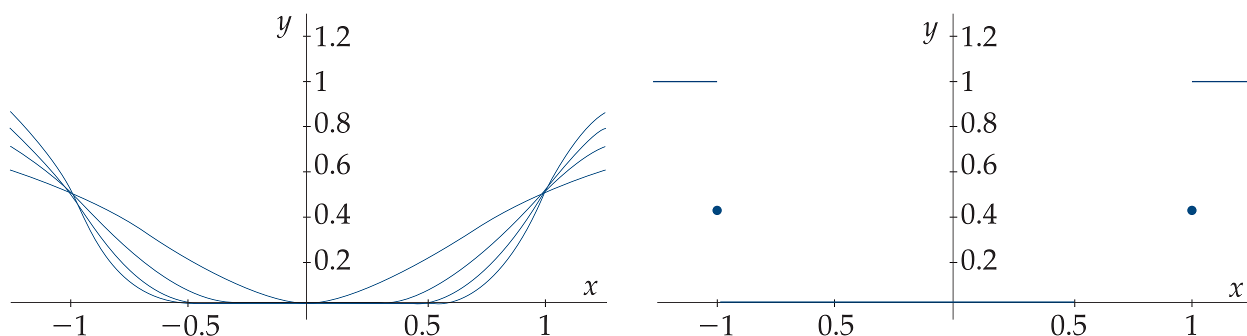
Sea ahora $|x| > 1$, en este caso tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{2n} + 1} = 1 \text{ para } |x| > 1.$$

Por tanto la sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

En la figura de la página siguiente se muestran las gráficas de algunas funciones de la sucesión $(f_n)$ y de la función límite.




## Nota

Observemos que en el ejemplo 5, la sucesión $(f_n(x))$ converge para algunos valores de $x$ y diverge para otros valores, así que la sucesión $(f_n)$ no es puntualmente convergente. En los ejemplos 6, 7 y 9 las sucesiones $(f_n)$ convergen puntualmente a una función discontinua en un punto de su domino, no obstante que todas las funciones $f_n$ son continuas en todo punto del dominio común. Los ejemplos 8 y 10 son más interesantes. En cada uno la sucesión $(f_n)$ converge puntualmente a la función constante cero en el dominio $x \in [0, 1]$. Cada una de estas funciones es continua en $[0, 1]$ y la función límite también lo es en el intervalo $[0,1]$. Lo espectacular del ejemplo 10 es que para esta sucesión, a medida que crece $n$, el máximo de $f_n$ también crece ilimitadamente, es decir, si $M_n = \text{máx } f_n(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = +\infty,$$

no obstante que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para toda $x \in [0, 1]$. Estos fenómenos no van a ocurrir en otro tipo de convergencia, que llamaremos convergencia uniforme y que será el tema de la siguiente sección.

# 5.3 Convergencia uniforme. Límite uniforme de una sucesión de funciones

Comencemos con la definición de convergencia uniforme, enseguida haremos una reflexión sobre ella y la compararemos con la convergencia puntual.

## Definición

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n$: $D \to \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)$ **converge uniformemente** a una función $f$: $D \to \mathbb{R}$ y que $f$ es el **límite uniforme** de la sucesión $(f_n)$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

para toda $x \in D$ y ≥ todo natural $n \geq N$.

Esta definición es muy similar a la de convergencia puntual, sin embargo si comparamos cuidadosamente ambas definiciones notaremos en sus enunciados que es diferente el orden de aparición de la frase “toda $x \in D$”. En la definición de convergencia puntual, la frase “toda $x \in D$” aparece en un lugar que deja la posibilidad de que el natural $N$ dependa no solamente de $\varepsilon$ sino

que también dependa del punto $x \in D$. Sin embargo, en la definición de convergencia uniforme, el natural $N$ si bien puede depender de $\varepsilon$, debe ser independiente de $x$.

Para hacer más clara la diferencia entre ambas definiciones, las presentamos haciendo explícita la dependencia del natural $N$ de $\varepsilon$ o de $\varepsilon$ y $x$ en su caso.

### Definición

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n{:}D \to \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)$ **converge puntualmente** a una función $f{:}D \to \mathbb{R}$, si para cada $x \in D$ y toda $\varepsilon > 0$ existe $N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo natural $n \geq N(x, \varepsilon)$.

### Definición

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n{:}D \to \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)$ **converge uniformemente** a una función $f{:}D \to \mathbb{R}$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para toda $x \in D$ y todo natural $n \geq N(\varepsilon)$.

Antes de hacer algunas reflexiones sobre las diferencias entre ambas definiciones, mostremos un teorema que establece una relación entre ellas.

### Teorema

Si una sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n{:}D \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a una función $f{:}D \to \mathbb{R}$ entonces $(f_n)$ converge puntualmente a $f$.

### Demostración

Por definición, para toda $\varepsilon > 0$ existe un natural $N$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in D$ y todo natural $n \geq N$. Pero esto implica que para cada $x \in D$ fija se tiene $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Luego $(f_n)$ converge puntualmente a $f$.

El siguiente teorema es fácil de probar y se deja como ejercicio para el lector.

### Teorema

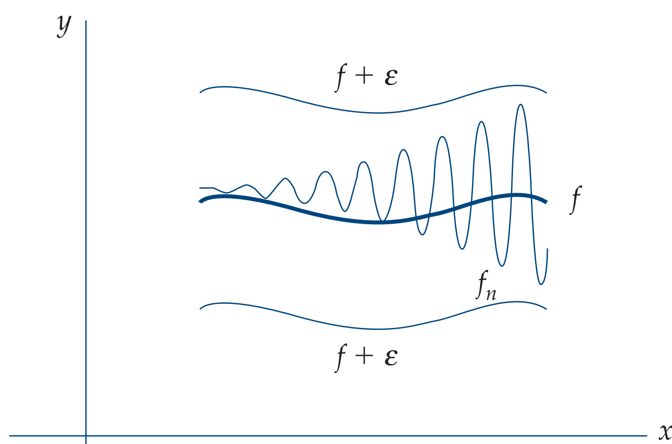
Sean $(f_n)$ y $(g_n)$ dos sucesiones de funciones $f_n, g_n{:}\, D \to \mathbb{R}$ que convergen uniformemente a funciones $f{:}\, D \to \mathbb{R}$ y $g{:}\, D \to \mathbb{R}$, respectivamente, entonces la suma de las sucesiones $(f_n) + (g_n) = (f_n + g_n)$ converge uniformemente a $f + g$.

### Nota

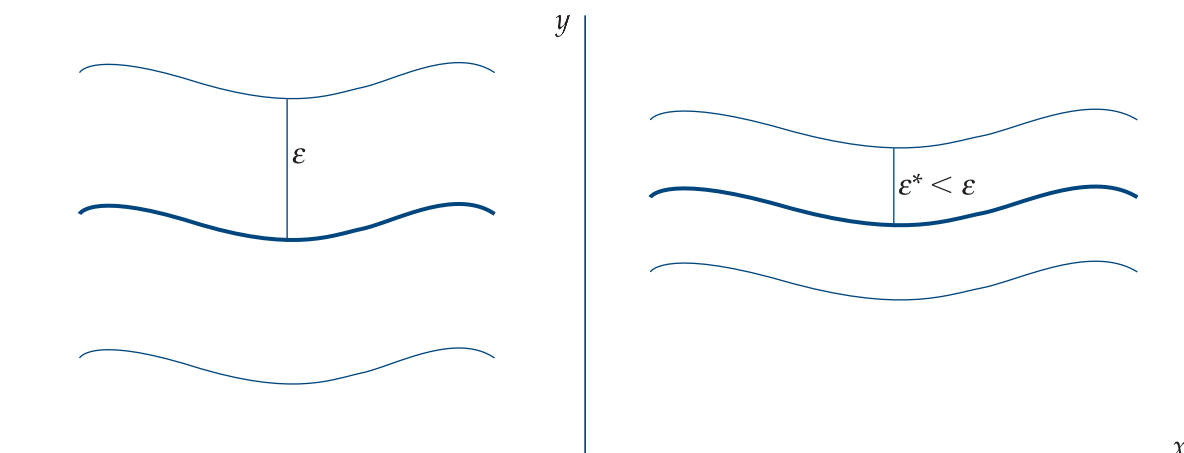
En el problema 5 de la lista al final de este capítulo se da un ejemplo que muestra que el teorema correspondiente al producto es falso, es decir, el producto $(f_n\, g_n)$ de dos sucesiones $(f_n)$ y $(g_n)$ uniformemente convergentes no necesariamente es uniformemente convergente.

## 5.4 Una reflexión sobre la convergencia uniforme

El teorema anterior establece que la convergencia uniforme implica convergencia puntual, pero como después mostraremos, el recíproco es falso. Por el momento observemos que el hecho de que en la definición de convergencia uniforme el natural $N$ no dependa de los puntos $x$ del dominio de las funciones $f_n$, tiene una interesante interpretación geométrica. Que la desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ se cumpla para toda $x \in D$ y todo natural $n \geq N$, significa que las gráficas de $f_n$ y $f$ distan en cada punto $x$ menos que $\varepsilon$. Esto quiere decir que para toda $n \geq N$, la gráfica de $f_n$ en su totalidad se encuentra en una franja de "ancho $2\varepsilon$" alrededor de la gráfica de $f$, como se ilustra en la siguiente figura.




La funciones $f_n$ cuyas gráficas se encuentran en esa franja serán a partir de un cierto índice $N$, el cual dependerá de $\varepsilon$. Entre más pequeña sea $\varepsilon$, más angosta será la franja y se requerirá que los índices $n$ sean más grandes para que las gráficas se ubiquen en ella. Con un lenguaje un tanto impreciso podemos decir que en la convergencia uniforme, las gráficas de las funciones se "pegan uniformemente" a la gráfica de la función límite, lo que no ocurre con la convergencia puntual, como mostraremos más adelante.



## Ejemplo 11

Sea $0 < b < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n:[0, b] \to \mathbb{R}$ como $f_n(x) = x^n$. Entonces $(f_n)$ converge uniformemente a la función constante cero en el intervalo $[0, b]$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Puesto que $f_n$ es una función creciente tenemos que $f_n(x) \leq f_n(b) = b^n$, para toda $x \in [0, b]$. Por otra parte como $0 < b < 1$, tenemos $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$. Por tanto para la $\varepsilon$ dada existe un natural $N$ tal que $0 < b^n < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$. Luego, $0 \leq f_n(x) \leq b^n < \varepsilon$ para toda $n \geq N$ y toda . Así que

$$|f_n(x)| < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N \text{ y toda } x \in [0, b].$$

Esto prueba que $(f_n)$ converge uniformemente a la función constante cero en el intervalo $[0, b]$.

## Ejemplo 12

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n:[0, b] \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = x(1-x^2)^n.$$

Ya hemos probado en el ejemplo 8 que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{para toda } x \in [0, 1].$$

Ahora probemos que la convergencia es uniforme, para lo cual debemos hallar los valores máximos de las funciones $f_n$. Para encontrar los puntos del intervalo $[0, 1]$ donde $f_n$ toma su valor máximo, primero hallemos los puntos donde su derivada se anula. Al derivar la función $f_n(x) = x(1-x^2)^n$ obtenemos

$$f'_n(x) = (1-x^2)^{n-1}[1-(1+2n)x^2].$$

Para $n \geq 2$, esta función definida en todos los reales tiene puntos críticos en $x = \pm 1$ y $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$.

Puesto que nuestras funciones tienen por dominio el intervalo $[0, 1]$, sus puntos críticos son 1 y $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$. Por otra parte, puesto que $f_n(x) \geq 0$ para toda $x \in [0, 1]$ se sigue que $0 = f_n(0) = f_n(1)$ es el valor mínimo absoluto de $f_n$ en el intervalo $[0, 1]$. Por tanto su valor máximo en ese intervalo lo toma en $x_n$, y es

$$M_n = f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n}.$$

Esta expresión también puede escribirse

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{\left[\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces tenemos

$$0 \leq x(1-x^2)^n \leq \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{\left[\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{para toda } x \in [0, 1].$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Por tanto, para cualquier $\varepsilon>0$ existe un natural $N$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene

$$0 \leq x\,(1-x^2)^n < \varepsilon \text{ para toda } x \in [0,1]$$

Esto prueba que $(f_n)$ converge uniformemente a la función constante cero en $[0,1]$.

## 5.5 Convergencia uniforme y continuidad

El hecho de que en una convergencia uniforme las gráficas de las funciones $f_n$ de la sucesión, se "peguen uniformemente" a la gráfica de la función límite $f$, implica que la función límite hereda la continuidad de las funciones $f_n$, cuando ellas son continuas, lo que no ocurre con la convergencia puntual, como lo muestran varios de los ejemplos antes presentados. Ahora probaremos que efectivamente el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua.

### Teorema

Sea $I$ un intervalo y sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n: I \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f: I \to \mathbb{R}$. Supongamos que cada función $f_n$ es continua en un punto $a \in I$, entonces $f$ es continua en $a$. Si cada función $f_n$ es continua en $I$, $f$ es continua en $I$.

### Demostración

Bajo la hipótesis de que cada función $f_n$ es continua en $a$ probemos que $f$ es continua en $a$. Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitrario. Probemos que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in I$ que cumpla $|x - a| < \delta$. Como $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ existe un natural $N$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $n \geq N$ y toda $x \in I$. En particular $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $x \in I$ así que también $|f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Por otra parte, como $f_N$ es continua en $a$, existe $\delta>0$ tal que $|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $x \in I$ y en la vecindad $(a-\delta, a+\delta)$. Por tanto para toda $x \in I$ que cumpla $|x - a| < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f(a)\right| &= \left|f(x) - f_N(x) - f_N(x) + f_N(a) + f_N(a) - f(a)\right| \\
&\leq \left|f(x) - f_N(x)\right| + \left|f_N(x) - f_N(a)\right| + \left|f_N(a) - f(a)\right|. \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Esto prueba que $f$ es continua en $a$. Si cada función $f_n$ es continua en cada punto de $I$ entonces $f$ es continua en cada punto de $I$, es decir $f$ es continua en $I$. Esto prueba el teorema.

## 5.6 Convergencia puntual no uniforme

Antes de hacer una reflexión sobre la convergencia no uniforme veamos algunos ejemplos.

### Ejemplo 13

En el ejemplo 11 probamos que si $0 < b < 1$ la sucesión de funciones $f_n(x)=x^n$ converge uniformemente a la función constante cero en el intervalo $[0,b]$. La convergencia uniforme se debe a que las funciones tienen por dominio el intervalo $[0,b]$, con $b$ estrictamente menor que 1. La convergencia es no uniforme si tomamos como dominio el intervalo $[0,1]$ o incluso el intervalo $[0,1)$. Es decir, si para toda $n\in\mathbb{N}$ definimos $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ por $g_n(x) = x^n$, entonces $(g_n)$ converge puntual pero no uniformemente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esto es consecuencia de que la función límite es discontinua en el punto $x=1$, pues si la convergencia fuese uniforme su función límite debería ser continua pues cada función $g_n(x) = x^n$ es continua en el intervalo $[0,1]$.

El razonamiento empleado en el ejemplo anterior puede aplicarse en algunos casos para probar que una sucesión de funciones que converge puntualmente a una función no converge uniformemente. Esto lo establecemos en la siguiente proposición la cual se sigue directamente del teorema anterior.

### Proposición

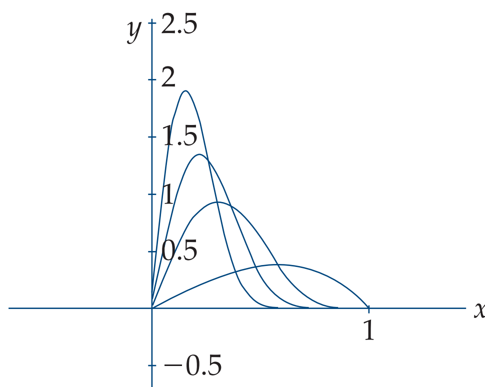
Sea $I$ un intervalo y $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n: I\to\mathbb{R}$ continuas que converge puntualmente a una función $f_n:I\to\mathbb{R}$. Si $f$ es discontinua en algún punto, entonces $(f_n)$ no converge uniformemente a $f$.

Por supuesto esta proposición no podemos aplicarla cuando el límite es una función continua, este es el caso de la sucesión del ejemplo 9. Veamos que efectivamente la convergencia de la sucesión del ejemplo 9 no es uniforme.

### Ejemplo 14

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x)=nx(1-x^2)^n.$$



Sabemos que la sucesión converge puntualmente a la función constante cero en el intervalo, es decir

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ para toda } x\in[0,1].$$

Probemos ahora que $(f_n)$ no converge uniformemente a esta función. Para ello debemos probar que existe una $\varepsilon > 0$ tal que no es posible hallar un natural $N$ de manera que todas las funciones $f_n$ con índice $n \geq N$ cumplan

$$\left|f_n(x) - 0\right| = \left|f_n(x)\right| < \varepsilon \text{ para toda } x \in [0,1].$$

Específicamente mostraremos que para $\varepsilon=1$, no es posible hallar el índice $N$. Esto último lo haremos probando que podemos hallar índices $n$ tan grandes como se desee tales que

$$\left|f_n(x)\right| > 1 \text{ para algún valor de } x\in \left[0,1\right]$$

Es decir, probaremos que existen valores de $n$ tan grandes como se desee tales que

$$\left|nx(1-x^2)^n\right| = nx(1-x^2)^n > 1 \text{ para algún valor de } x\in\left[0,1\right].$$

Para ello mostraremos que la sucesión de máximos de las funciones $f_n$ tiende a infinito, es decir

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = \infty.$$

Esto implicará que para $n$ mayor o igual que cierto índice $N_0$ se tiene $M_n = f(x_n) > 1$, donde $x_n$ es un punto donde $f_n$ alcanza su valor máximo. Con lo cual habremos terminado la prueba.

Para hallar los puntos del intervalo $[0,1]$ donde las funciones $f_n$ toman su valor máximo, primero encontremos los puntos donde su derivada se anula. Esto esencialmente ya lo hicimos en el ejemplo 12 con las funciones $x(1-x^2)^n$. Al derivar la función $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ obtenemos

$$f_n'(x) = n(1-x^2)^{n-1}\left[1-(1+2n)x^2\right].$$

Cada función $f_n$ toma su valor mínimo 0 en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. Su valor máximo en su único punto crítico $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$ del intervalo $[0,1]$. Este valor máximo es

$$M_n = \frac{n}{\sqrt{1+2n}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+2}} \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+2} = 2 \text{ y } \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Concluimos que $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$. Esto implica en particular que existe un natural $N_0$ tal que $M_n>1$ para todo natural $n>N_0$. Con esto se termina la prueba.

El ejemplo anterior tiene dos tipos de dificultades, una de ellas es la concerniente a los detalles técnicos propios de las funciones $f_n$, por ejemplo la dificultad de hallar los valores máximos y probar que la sucesión de máximos tiende a infinito. La otra dificultad es de carácter conceptual. Se trata de la comprensión de lo que significa que una sucesión de funciones no converja

uniformemente a una función que es límite puntual de la sucesión. En general no es simple hacer negaciones lógicas de enunciados matemáticos, la convergencia uniforme es un caso que merece especial atención, por lo cual la establecemos a continuación:

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a una función $f$ en un conjunto $D$. Que la sucesión $(f_n)$ no converja uniformemente a la función $f$ en $D$, significa que existe $\varepsilon_0>0$ tal que para todo natural $N$ existe una función $f_n$ con $n \geq N$ y existe al menos un punto $x \in D$ tales que

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| > \varepsilon_0.$$

## 5.7 Convergencia uniforme e integrales

Antes de estudiar la convergencia uniforme y su relación con las integrales de funciones, como motivación veamos algunos ejemplos.

### Ejemplo 15

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n$: $[0,1] \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = x^n.$$

Como se muestra en el ejemplo 5, esta sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Como también ya hemos mostrado, la convergencia no es uniforme. En este caso la función límite es discontinua en el punto $x = 1$ y $\int_0^1 f(x)dx = 0$. También se tiene para toda $n \in N$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Así que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por tanto se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

### Ejemplo 16

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n$: $[0,1] \to \mathbb{R}$ del ejemplo 9, definidas como

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n.$$

Esta sucesión converge puntualmente a la función constante cero en el intervalo $[0,1]$. Cada una de las funciones $f_n$ es continua en $[0,1]$ y la función límite también es continua en este intervalo, no obstante que la convergencia no es uniforme, como también ya se probó.
Puesto que para todo natural $n$:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2(1+n)} = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}.$$

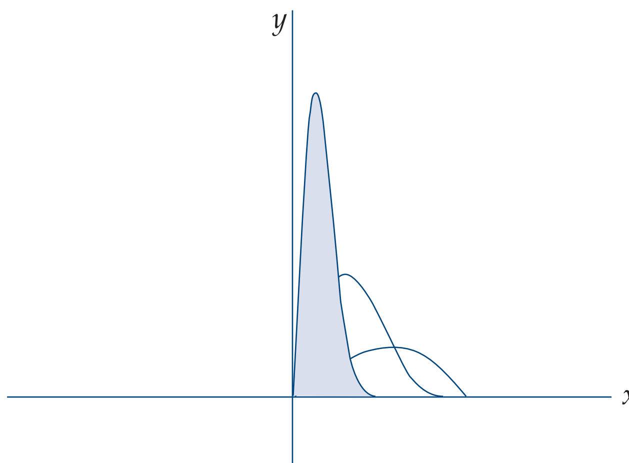
Por otra parte

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$

En palabras, el límite de las integrales es diferente de la integral de la función límite. Este fenómeno es muy interesante. Geométricamente significa que las áreas bajo las gráficas de las funciones $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ no crecen ilimitadamente, no obstante que los máximos de estas funciones tiendan a infinito, por el contrario las áreas bajo las gráficas tienden al valor $\frac{1}{2}$. Por otra parte, el área bajo la gráfica de la función límite vale cero.




El límite de las integrales es igual a la integral del límite cuando la convergencia es uniforme, como lo mostramos a continuación.

### Teorema

Sean $a<b$ y sea $(f_n)$ una sucesión de funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b]$. Supongamos que $(f_n)$ converge uniformemente a una función $f$: $[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

### Demostración

Probemos que el real $\int_a^b f(x)dx$ es el límite de la sucesión de reales $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$. Sea pues $\varepsilon > 0$. Mostremos que existe un natural $N$ tal que

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon \text{ para todo natural } n \geq N.$$

Como $(f_n)$ converge uniformemente a $f$, existe un natural $N$ tal que

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ para todo natural } n \geq N.$$

Entonces

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)dx\right| \leq \int_a^b \left|f_n(x) - f(x)\right| dx.$$

Por tanto

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

Esto prueba el teorema.

## 5.8 Criterio de Cauchy para convergencia uniforme

Ahora estableceremos un importante criterio para garantizar la convergencia uniforme, mismo que nos será muy útil cuando estudiemos convergencia uniforme y derivadas.

El criterio de Cauchy para convergencia uniforme de sucesiones de funciones es muy similar al criterio de convergencia para sucesiones de reales, ya que garantiza la convergencia de la sucesión sin necesidad de hacer explícito el límite.

### Teorema (Criterio de Cauchy)

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n: D \to \mathbb{R}$. La sucesión $(f_n)$ converge uniformemente si y solamente si para toda $\varepsilon > 0$ existe un natural $N$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ para toda } x \in D \text{ y cualesquiera } n, m \geq N.$$

Esta última condición se llama Condición de Cauchy.

### Demostración

Supongamos primero que la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente y sea $f$ su límite. Entonces por definición, para toda $\varepsilon > 0$ existe un natural $N$ tal que

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para toda } x\in D \text{ y toda } n\geq N.$$

Por tanto, si $n, m \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| &= \left|f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)\right| \\ &< \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_m(x)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

para toda $x\in D$. Esto prueba que si la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente, entonces cumple la condición de Cauchy. Probemos el recíproco. Supongamos ahora que se cumple la condición de Cauchy. Mostremos que entonces la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $N$ tal que

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon \text{ para toda } x\in D \text{ y cualesquiera } n, m \geq N.$$

Del criterio de Cauchy para sucesiones de reales se sigue que para cada $x \in D$ fija, la sucesión de reales $(f_n(x))$ converge. Con esto definimos una función $f\colon D\to\mathbb{R}$ como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. La función $f$ es límite puntual de la sucesión $(f_n)$. Probemos que la convergencia es uniforme.

Si en la desigualdad $\left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$ fijamos $n$ y tomamos el límite cuando $m\to+\infty$ obtenemos

$$\lim_{m\to\infty}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \varepsilon \text{ para toda } x \in D \text{ y toda } n \geq N.$$

Es decir

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon \text{ para toda } x \in D \text{ y toda } n \geq N.$$

Esto significa que la convergencia es uniforme, lo cual prueba el teorema.

## 5.9 Convergencia uniforme y derivadas

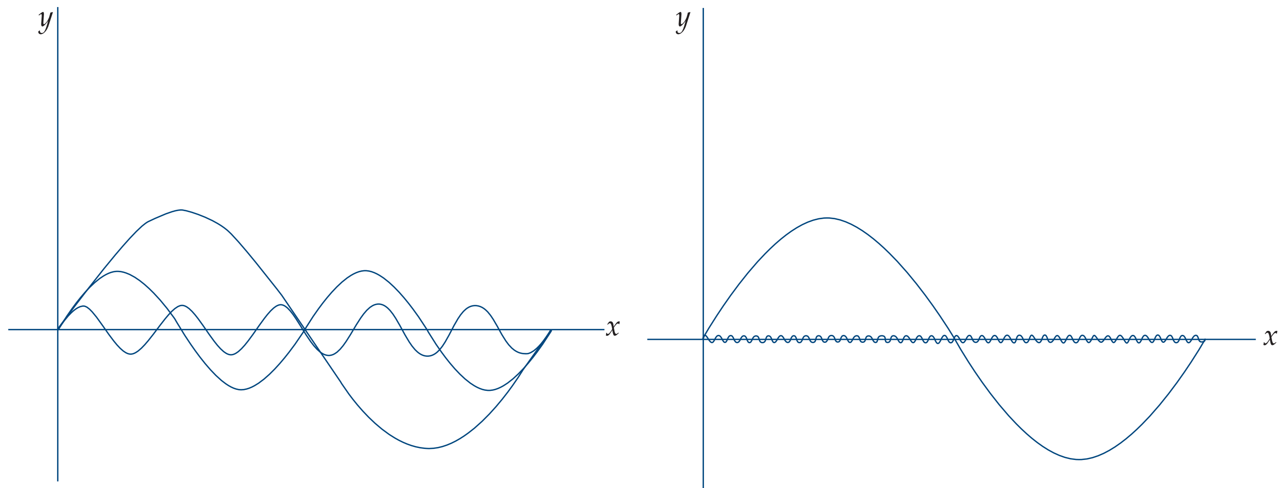
Consideremos la sucesión del ejemplo 3 de este capítulo.

### Ejemplo 17

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n\colon [0, 2\pi]\to\mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \text{ para toda } n\in N.$$

Para mostrar los aspectos interesantes de la sucesión es suficiente considerar como dominio el intervalo $[0, 2\pi]$. En la figura izquierda de abajo se muestran las gráficas de algunas funciones $f_n$. A la derecha se muestra la gráfica de $f_1(x)$ y $f_{40}(x)$.




La sucesión converge uniformemente a la función constante cero en el intervalo $[0, 2\pi]$. Esto se puede apreciar en las gráficas, pues para $n$ grande la gráfica de $f_n$ se pega uniformemente a la función constante cero. Sin embargo, la prueba es muy simple pues la convergencia uniforme se sigue inmediatamente de la desigualdad

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right| = \frac{|\operatorname{sen} nx|}{|n|} \leq \frac{1}{n} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, al derivar cada $f_n$ obtenemos

$$f_n'(x) = \cos nx \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \text{ y toda } x \in [0, 2\pi].$$

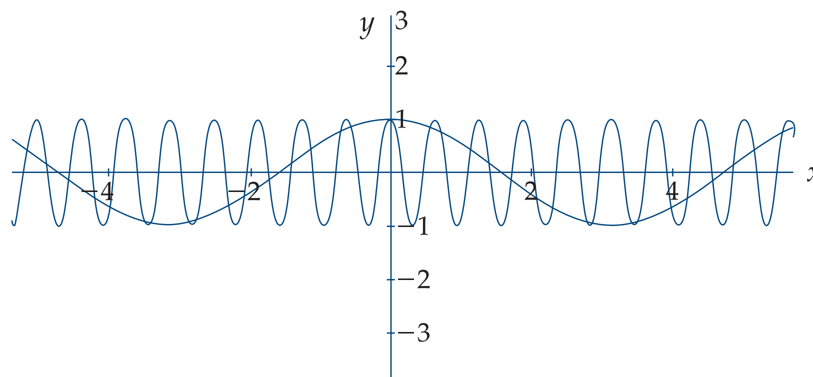
Es fácil probar que la sucesión de las funciones derivadas $(f_n')$ no convergen, ni siquiera puntualmente, pues por ejemplo la sucesión $(f_n'(\pi))$ es la sucesión

$$\left((-1)^n\right) : -1, 1, -1, 1, \ldots$$

la cual es divergente. Entonces ciertamente no se cumple

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \text{ para toda } x \in [0, 2\pi]$$

En la figura de abajo se muestran $f'_1$ y $f'_{10}$



### Ejemplo 18

Sea la sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ definidas como

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ para toda } n\in\mathbb{N} \text{ y toda } x\in[0,1].$$

De la desigualdad $\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ para toda $n\in\mathbb{N}$ y toda $x\in[0,1]$ se sigue que la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente a la función constante cero en el intervalo $[0,1]$. Por otra parte, al derivar las funciones $f_n$ se tiene

$$f_n'(x) = x^n.$$

Como sabemos de los ejemplos 5 y 13, esta sucesión de derivadas converge puntualmente a la función $g$:$[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases},$$

que no es la derivada de la función límite (la función constante cero).

En resumen, los dos ejemplos anteriores son casos en los que se tiene una sucesión $(f_n)$ de funciones derivables $f_n$ que converge uniformemente a una función $f$, pero la sucesión de derivadas $(f_n')$ no converge a la derivada $f'$ de la función límite $f$ aun cuando la sucesión de derivadas converja puntualmente.

El siguiente teorema da condiciones bajo las cual es el límite de las derivadas es igual a la derivada del límite.

### Teorema

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones derivables $f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ que converge puntualmente a una función $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Supóngase que la sucesión de derivadas $(f_n')$ converge uniformemente. Entonces

*a*) la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente,
*b*) la función $f$ es derivable,
*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ para toda $x\in [a,b]$

### Demostración

Probemos primero que $(f_n)$ converge uniformemente. Por hipótesis la sucesión $(f_n')$ converge uniformemente, por tanto por el criterio de Cauchy existe un natural $N_1$ tal que

$$\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ para toda } x\in [a,b] \text{ y cualesquiera } m, n \geq N_1.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$, por el criterio de Cauchy para sucesiones de reales, existe una natural $N_2$ tal que

$$\left|f_n(a) - f_m(a)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para cualesquiera } m, n \geq N_1.$$

Si hacemos $N$=máx$\{N_1, N_2\}$, se cumplirán simultáneamente

$$\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ para toda } x\in [a,b]$$

y

$$\left|f_n(a) - f_m(a)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para cualesquiera $m, n \geq N$.
Consideremos ahora la función $f_n - f_m$. Sea $a < x \leq b$; por el teorema del valor medio existe un punto $\xi \in (a, x)$ tal que

$$(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a) = (f_n - f_m)'(\xi)(x - a).$$

Es decir

$$(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a)) = (f_n'(\xi) - f_m'(\xi))(x - a).$$

Por tanto si $m, n \geq N$, tenemos

$$\left|\left(f_n(x) - f_m(x)\right) - \left(f_n(a) - f_m(a)\right)\right| = \left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right|\left|x - a\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)}\left|x - a\right|.$$

De la desigualdad anterior tenemos para $m, n > N$,

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| &\leq \left|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a)) + (f_n(a) - f_m(a))\right|\\ &\leq \left|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))\right| + \left|f_n(a) - f_m(a)\right|\\ &\leq \left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right|\left|x - a\right| + \left|f_n(a) - f_m(a)\right|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)}\left|x - a\right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \varepsilon \text{ para toda } x \in [a, b] \text{ y cualesquiera } m, n \geq N.$$

Esto prueba, por el criterio de Cauchy, que la sucesión $(f_n)$ converge uniformemente. Así hemos probado el inciso a).

Ahora probemos que $f$ es derivable y que la sucesión de derivadas $(f_n')$ converge a $f'$.

Sea $x_0 \in [a, b]$, probemos que existe $f'(x_0)$ y que $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = f'(x_0)$. Consideremos los cocientes

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ y } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Por una parte, como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ para toda } x \in [a, b],\ x \neq x_0$$

Demostremos que esta convergencia es uniforme, es decir, que $\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ converge uniformemente a $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ en $[a, b] - \{x_0\}$. Para simplificar la notación escribamos

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ y } g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Estas funciones tienen por dominio $[a, b] - \{x_0\}$ y deseamos probar que $(g_n)$ converge uniformemente a $g$. Sabemos que $(g_n)$ converge puntualmente a $g$, probemos que $(g_n)$ cumple la condición de

Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $x \neq x_0$ y consideremos

$$\begin{aligned} \left|g_n(x) - g_m(x)\right| &= \left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \left|\frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - x_0} - \frac{f_n(x_0) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \frac{\left|\left(f_n(x) - f_m(x)\right) - \left(f_n(x_0) - f_m(x_0)\right)\right|}{\left|x - x_0\right|.} \end{aligned}$$

De manera similar a lo realizado al inicio de esta demostración, aplicando el teorema del valor medio al intervalo con extremos $x$ y $x_0$, tenemos que existe un punto $\xi$ entre estos puntos tal que

$$\left|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))\right| = \left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right|\left|x - x_0\right|.$$

para toda $x \neq x_0$. Es decir

$$\frac{\left|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))\right|}{\left|x - x_0\right|} = \left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right|.$$

$$\left|\frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - x_0} - \frac{f_n(x_0) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right|.$$

para toda $x \neq x_0$. Como $(f_n')$ converge uniformemente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geq N$, se tiene $\left|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)\right| \leq \varepsilon$ para toda $\xi \in [a, b]$. Entonces

$$\left|\frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - x_0} - \frac{f_n(x_0) - f_m(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \varepsilon$$

para cualesquiera $n, m \geq N$ y toda $x \neq x_0$. Esto prueba que $(g_n)$ converge uniformemente a $g$. Es decir, los cocientes $\dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ convergen uniformemente al cociente $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ para $x \neq x_0$.
Sea ahora $L = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x_0)$, probemos que

$$L = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Para toda $x \in [a, b] - \{x_0\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L\right| &\leq \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} + \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0) + f_n'(x_0) - L\right| \\ &\leq \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| + \left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0)\right| + \left|f_n'(x_0) - L\right| \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ es dada, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ (por la convergencia uniforme)}$$

y

$$\left| f_n'(x_0) - L \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ (porque } f_n'(x_0) \to L\text{)}.$$

Como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_N(x) - f_N(x_0)}{x - x_0} = f_N'(x_0),$$

existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in [a, b]$ que cumpla $0 < | x - x_0 | < \delta$ se tiene

$$\left| \frac{f_N(x) - f_N(x_0)}{x - x_0} - f_N'(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto para toda $x \in [a, b]$ que cumpla $0 < | x - x_0 | < \delta$ se tiene

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_N(x) - f_N(x_0)}{x - x_0} \right| + \left| \frac{f_N(x) - f_N(x_0)}{x - x_0} - f_N'(x_0) \right| + \left| f_N'(x_0) - L \right|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Esto prueba que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0).$$

O sea

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_0).$$

Con esto queda demostrado el teorema.

Ahora estableceremos una versión más débil del teorema anterior que se demuestra fácilmente con el teorema fundamental del cálculo.

### Teorema

Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables, con derivadas $f_n'$ continuas para toda $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que $(f_n)$ converge puntualmente a $f$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ y que la sucesión de derivadas $(f_n')$ converge uniformemente, digamos a una función $g$: $[a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces $(f_n)$ converge uniformemente y su límite $f$ es derivable, además

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) \text{ para toda } x \in [a,b].$$

### Demostración

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$f_n(x) = \int_a^x f_n'(u)du + f_n(a) \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \text{ y toda } x \in [a,b].$$

Como $(f_n')$ converge uniformemente a $g$ y cada $f'_n$ es continua, así lo es su límite $g$ y para cada $x \in [a, b]$ la sucesión de integrales $\int_a^x f_n'(u)du$ converge a la integral $\int_a^x g(u)du$.

Por tanto para cada $x \in [a, b]$, $\int_a^x f_n'(u)du + f_n(a)$, converge a $\int_a^x g(u)du + f(a)$, así que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^x f_n'(u)du + f_n(a)\right) = \int_a^x g(u)du + f(a)$$

para cada $x \in [a, b]$.
Como $g$ es continua, $f$ es derivable y $f'(x) = g(x)$ para toda $x \in [a, b]$. Entonces

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

para toda $x \in [a, b]$. Esto prueba el teorema.

## 5.10 Series de funciones

Dada una sucesión $(f_n)$ de funciones $f_n$: $D \to \mathbb{R}$, la **serie** con **término general** $f_n$ es la sucesión de funciones

$$f_1,\ f_1+f_2,\ \ f_1+f_2+f_3, \ldots$$

Con más precisión, la serie es la sucesión de funciones $(s_n)$ donde

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Cada $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ se llama **suma parcial** de la serie. Denotaremos por $\sum_{k\geq 1} f_k$ la serie con término general $f_k$. También vamos a referirnos a $\sum_{k\geq 1} f_k$ como la serie de funciones $f_k$. Vale entonces escribir $\sum_{k\geq 1} f_k = (s_n)$. Con frecuencia también escribiremos $\sum f_k$ en lugar de $\sum_{k\geq 1} f_k$. En ocasiones la sucesión $(f_n)$ está definida para $n \geq 0$, o bien, para $n \geq N$, para algún natural $N$. En cuyo caso las series serán respectivamente

$$f_0, f_0 + f_1, f_0 + f_1 + f_3, \ldots$$

y

$$f_N,\ f_N + f_{N+1},\ f_N + f_{N+1} + f_{N+2}, \ldots$$

Las notaciones correspondientes serán $\sum_{k\geq 0} f_k$ y $\sum_{k\geq N} f_k$.

Dado que una serie de funciones es una sucesión, entonces la teoría que hemos desarrollado acerca de sucesiones de funciones es aplicable a este caso especial. Por lo anterior enseguida nos limitaremos a enunciar en su versión para series algunas definiciones y resultados sobre sucesiones de funciones.

## Definición y notación

Decimos que una serie $\sum_{k\geq 1} f_k$ con término general $f_k\colon D\to\mathbb{R}$ converge puntualmente si para alguna función $S\colon D\to\mathbb{R}$ se tiene

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \text{ para toda } x\in D.$$

En cuyo caso también escribiremos $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$.

### Nota

Observe que una serie con término general $f_k$ se denota por $\sum_{k\geq 1} f_k$ o simplemente por $\sum f_k$, mientras que su límite puntual, cuando existe, se denota por $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$. Este símbolo es un límite, y podemos imaginarlo como el resultado de una sumatoria infinita, mientras que $\sum f_k$ es una sucesión. También vamos a referirnos a $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ como la suma de la serie. Algunos autores denotan a las series y a su suma por el mismo símbolo $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$, nosotros preferimos reservar este último para el límite, o bien, $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$.

## Definición

Una serie $\sum_{k\geq 1} f_k$ con término general $f_k\colon D\to\mathbb{R}$ converge uniformemente a una función $f\colon D\to\mathbb{R}$ si la sucesión de sumas parciales $(s_n)$ converge uniformemente a $f$.

El siguiente teorema no es otra cosa que la reformulación para series del criterio de Cauchy para sucesiones de funciones.

## Teorema (criterio de Cauchy para convergencia uniforme de series)

Una serie $\sum_{k\geq 1} f_k$ con término general $f_k\colon D\to\mathbb{R}$, converge uniformemente si y solamente si para cada $\varepsilon>0$ existe un natural $N$ tal que

$$\left|f_n(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| = \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \leq \varepsilon \text{ para todo } n\geq N, \text{ todo } p\in\mathbb{N} \text{ y toda } x\in D.$$

Del teorema anterior y del criterio de Cauchy para series de reales se sigue el siguiente.

## Teorema (criterio de Weierstrass para convergencia uniforme de series)

Sea $\sum_{k\geq 1} f_k$ una serie de funciones $f_k\colon D\to\mathbb{R}$ tal que existe una sucesión de reales $(M_n)$ que satisfacen

$$0 \leq \left|f_n(x)\right| \leq M_n \text{ para toda } x\in D.$$

Si la serie $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, entonces la serie de funciones $\sum_{k\geq 1} f_k$ converge uniformemente en $D$.

### Demostración

De las hipótesis se sigue que

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p}\left|f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} M_k \text{ para cualesquiera } n, p\in\mathbb{N} \text{ y toda } x\in D.$$

Si $\sum_{n\ge1} M_n$ converge, por el criterio de Cauchy para series de reales, para $\varepsilon>0$ existe un natural $N$ tal que

$$\sum_{k=n}^{n+p} M_k \le \varepsilon \text{ para todo } n\ge N, \text{ todo } p\in\mathbb{N}.$$

Por tanto

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p}\left|f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{n+p} M_k \le \varepsilon \text{ para cualesquiera } n, p\in\mathbb{N} \text{ y toda } x\in D.$$

Luego, por el criterio de Cauchy anterior la serie $\sum_{k\ge1} f_k$ converge uniformemente en $D$.

### Teorema

Sea $\sum_{k\ge1} f_k$ una serie de funciones continuas $f_k : D\to\mathbb{R}$. Si la sucesión de sumas parciales $(s_n)$ converge uniformemente, entonces la suma de la serie $\sum_{k+1}^{+\infty} f_k(x)$ es una función continua.

### Teorema

Sea $\sum_{k\ge1} f_k$ una serie de funciones continuas $f_k : [a,b]\to\mathbb{R}$. Si la sucesión de sumas parciales $(s_n)$ converge uniformemente, entonces la integral de la suma de la serie es el límite de la serie de las integrales, es decir

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)dx.$$

### Demostración

Como $(s_n)$ converge uniformemente, entonces por el teorema de convergencia uniforme para integrales tenemos $\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx$, es decir

$$\begin{aligned}\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)dx\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)dx.\end{aligned}$$

Esto prueba el teorema.

El siguiente teorema es una consecuencia directa del correspondiente al de sucesiones de funciones.

### Teorema

Sea $\sum_{k\geq 1} f_k$ una serie de funciones derivables $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ que converge puntualmente a una función $f$. Supóngase que la serie de derivadas $\sum_{k\geq 1} f_k'$ converge uniformemente a una función $g$. Entonces

1) $\sum_{k\geq 1} f_k$ converge uniformemente
2) $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ es derivable y además
3) $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x)$ para toda $x \in [a, b]$

### Ejemplo 19

Sea la serie de funciones $\sum_{k\geq 0} x^k$. La sucesión de sumas parciales es la suma geométrica

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Estas funciones están definidas para todo real $x$. Como sabemos para $x \neq 1$, se pueden escribir como

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ para $-1 < x < 1$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \text{ para } -1<x<1.$$

Esto significa que la serie $\sum_{k\geq 0} x^k$ converge puntualmente a la función

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \text{ para } -1<x<1.$$

Además, si elegimos $0<r<1$ y restringimos $x$ al intervalo cerrado $[-r, r] \subset (-1, 1)$, tenemos

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1 - x} \right| = \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = \frac{|x^{n+1}|}{|1 - x|} \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$$

De esta desigualdad se sigue que la convergencia es uniforme, pues dado que $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ para $\varepsilon > 0$ arbitraria podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > 0$

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1 - x} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r} < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N \text{ y toda } x \in [-r, r].$$

Por otra parte las funciones $x^k$ son derivables y la serie de derivadas es $\sum kx^{k-1}$. Las sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1}$ se obtienen derivando $s_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$, así que para $x \neq 1$ se tiene

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\right).$$

Es decir

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{x^{n+1}((n+1)x-n-2)+1}{(1-x)^2}.$$

Esta sucesión converge puntualmente a $\frac{1}{(1-x)^2}$ para toda $-1<x<1$, es decir $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. En efecto, sabemos que si $|x|<1$ entonces $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$, de aquí se sigue que $\lim_{n\to\infty}(n+1)x^{n+1} = 0$ y $\lim_{n\to\infty}(n+2)x^{n+1} = 0$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^{n+1}((n+1)x-n-2)\right) = x\lim_{n\to\infty}(n+1)x^{n+1} - \lim_{n\to\infty}(n+2)x^{n+1} = 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}((n+1)x-n-2)+1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ para toda } -1<x<1.$$

Esto prueba que $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ para toda $-1<x<1$. La convergencia es uniforme si restringimos $x$ al intervalo cerrado $[-r, r]\subset(-1, 1)$, donde $0<r<1$. En efecto, puesto que

$$\left|\frac{x^{n+1}((n+1)x-n-2)+1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\right| = \left|\frac{x^{n+1}((n+1)x-n-2)}{(1-x)^2}\right| \leq \frac{(n+1)r^{n+2}+(n+2)r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

y dado que $\lim_{n\to\infty}(n+1)r^{n+2} = 0$ y $\lim_{n\to\infty}(n+2)r^{n+1} = 0$, para $\varepsilon>0$ dada, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|S_n(x) - \frac{1}{(1-x)^2}\right| \leq \frac{(n+1)r^{n+2}+(n+2)r^{n+1}}{(1-r)^2} \leq \varepsilon, \text{ para toda } n\geq N \text{ y toda } x\in[-r,r].$$

Entonces la derivada de la función límite $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ debe ser igual a la derivada del límite de la serie de derivadas $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, lo cual se verifica fácilmente.

### Ejemplo 20

Sea la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ con término general $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Estas funciones están definidas para todo real $x$. Las sumas parciales son sumas geométricas de razón $r = \frac{1}{1+x^2}$, así que para $r\neq 1$, es decir para $x\neq 0$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+x^2-\frac{1}{(1+x^2)^n}}{x^2}$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(1+x^2)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+x^2-\dfrac{1}{(1+x^2)^n}}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

En otras palabras la serie converge puntualmente para todo real $x \neq 0$ y su límite es

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

Sea ahora la serie $\sum_{k\geq 0} g_n$, donde $g_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^k}$, se sigue de lo anterior que para todo $x \neq 0$ la serie converge puntualmente a la función $1+x^2$ es decir

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^k} = 1+x^2 \text{ para todo real } x \neq 0.$$

Por otra parte $g_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$, así que la serie converge a cero para $x = 0$. Por tanto la serie converge puntualmente a la función

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^k} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1+x^2 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

De esto se sigue que la convergencia no es uniforme, pues todas las funciones $g_n$ son continuas en $\mathbb{R}$, sin embargo la función límite no es continua en $x=0$.

# 5.11 Series de potencias

En el ejemplo 15 ya hemos estudiado la serie de funciones $\sum_{k\geq 0} x^k$ y la serie de las derivadas $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1}$. Estos son casos particulares de una clase especial de series de funciones, las series de potencias.

Una **serie de potencias** es aquella de la forma $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o más generalmente toda serie de la forma $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, donde los coeficientes $a_n$ son números reales para toda $n \in \mathbb{N}$. En esta sección aplicaremos a las series de potencias, los resultados generales sobre series de reales, por ejemplo los criterios de convergencia, así como sobre series de funciones ya estudiadas. Determinaremos condiciones sobre los coeficientes $a_n$ bajo las cuales las series convergen uniformemente, la mejor convergencia de las dos que hemos estudiado.

### Teorema

Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias tal que existe $L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

1) Si $L>0$, entonces la serie converge absolutamente en el intervalo abierto $(a-R, a+R)$ donde $R = \dfrac{1}{L}$, y diverge en todo punto fuera de este intervalo.
2) Si $L=0$, entonces la serie converge absolutamente en todo real $x$.

3) Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, entonces la serie converge solamente en el punto $x=a$.

Si $L=0$ definimos $R=+\infty$. Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ definimos $R=0$. En todos los casos a $R$ se le llama el **radio de convergencia** de la serie. En los casos 1) y 2), al intervalo $(a-R, a+R)$ se le llama **intervalo de convergencia**. Si $R = +\infty$, el intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$.

### Demostración

Apliquemos el criterio de la raíz de Cauchy para series de reales al caso de la serie $\sum_{n\geq 0}|a_n||x-a|^n$. Supóngase $L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n||x-a|^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-a| = L|x-a|.$$

Por el criterio de la raíz de Cauchy, si $0 \leq L|x-a|<1$ la serie $\sum_{n\geq 0}|a_n||x-a|^n$ converge. Por tanto si $L>0$ la serie $\sum_{n\geq 0}|a_n||x-a|^n$ converge cuando $L|x-a|<1$, es decir cuando $|x-a| < \frac{1}{L}$. Si $L|x-a|>1$, o sea cuando $|x-a|>\frac{1}{L}$, la serie $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ diverge. Esto prueba el inciso 1.

Si $L=0$, entonces $0 = L|x-a|<1$ para todo real $x$. Luego $\sum_{n\geq 0}|a_n||x-a|^n$ converge para todo real $x$. Esto prueba el inciso 2.

Finalmente, si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, entonces puesto que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n||x-a|^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x-a| = +\infty$ para toda $x \neq a$ y $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a^n||x-a|^n} = 0$ para $x = a$. La serie converge solamente para $x = a$. Esto prueba el inciso 3. Con esto concluimos la prueba del teorema.

### Teorema

Toda serie de potencias $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ con radio de convergencia $0<R\leq+\infty$, converge absoluta y uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado $[a-r, a+r]$ contenido en el intervalo de convergencia.

### Demostración

Sea $r>0$ tal que el intervalo cerrado $[a-r, a+r]$ esté contenido en el intervalo de convergencia. Entonces la serie $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ converge en el punto $x = a+r$, lo cual significa que la serie $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n = \sum_{n\geq 0}a_n r^n$ es convergente, por tanto puesto que para toda $x\in[a-r, a+r]$, se tiene $|a_n||x-a|^n \leq |a_n| r^n$ se sigue del teorema de Weierstrass para la convergencia uniforme de series que la serie $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$, converge uniformemente en $[a-r, a+r]$.

### Ejemplo 21

Sea la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} x^n$. En este caso $a = 0$ y $a_n = 1$ para toda $n \geq 0$. Entonces $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$, por tanto el radio de convergencia es $R = \frac{1}{L} = 1$, así que la serie converge para toda $-1 < x < 1$ y diverge para $|x| > 1$. Con esto hemos rescatado el resultado del ejemplo 19, en donde además obtuvimos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ para } -1 < x < 1.$$

Ahora podemos afirmar que la serie converge uniformemente en todo intervalo de la forma $[-r, r]$ con $0 < r < 1$.

### Ejemplo 22

Consideremos ahora la serie de derivadas $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$ del ejemplo anterior. Se deja como ejercicio para el lector que pruebe que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ (recuerde la prueba para $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$).

Entonces esta serie tiene el mismo radio de convergencia $R = 1$, por lo que también converge puntualmente a la función

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ para } -1 < x < 1$$

y converge uniformemente en todo intervalo cerrado $[-r, r]$ con $0 < r < 1$.

### Ejemplo 23

Sea la serie $\sum_{k\geq 0} x^k = \sum_{n\geq 0} x^{2n}$. En este caso los coeficientes son $a_k = 0$ si $k$ es impar y $a_k = 1$ si $k$ es par. Así que no existe $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, sin embargo ya hemos probado que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ para } -1 < x < 1.$$

Por tanto tenemos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1-x^2} \text{ para } -1 < x < 1.$$

Entonces el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0} x^{2n}$ contiene al intervalo $(-1, 1)$. Pero esta serie diverge para $x = 1$, entonces su intervalo de convergencia es precisamente $-1 < x < 1$.

### Ejemplo 24

Sea la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$. En este caso $a = 0$ y $a_n = (-1)^n$ para toda $n \geq 0$. Por tanto $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$. Luego el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

El límite de la serie se obtiene fácilmente observando que si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ para } -1<x<1,$$

entonces

$$h(x) = f(-x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x} \text{ para } -1<x<1.$$

Entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$.

### Ejemplo 25

La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ converge para todo real $x$. En este caso se utiliza el criterio de la razón de D'Alembert. Por tanto, el radio de convergencia de esta serie es $R=+\infty$. Su límite $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ lo descubriremos en la siguiente sección.

### Ejemplo 26

La serie de potencias $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$ tiene radio de convergencia $R=1$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Así que la serie converge para toda $-1<x<1$.

### Ejemplo 27

La serie de potencias $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} x^n$ tiene radio de convergencia $R=1$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1.$$

Por tanto la serie converge para toda $-1<x<1$.
Ahora veamos un importante teorema sobre las series de potencias.

## Teorema

Sea $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0 < R \leq +\infty$. Entonces la serie de derivadas $\sum_{n\geq 1} n a_n (x-a)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia $0 < R \leq +\infty$. Además si $I$ es el intervalo común de convergencia y

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \text{ para toda } x \in I$$

entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \text{ para toda } x \in I.$$

Dicho en otras palabras, el límite de una serie de potencias es una función derivable en todos los puntos del intervalo de convergencia y la derivada del límite es el límite de la serie de las derivadas.

### Demostración

Que ambas series tienen el mismo radio de convergencia se sigue del hecho de que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ y de que el radio de convergencia $0 < R \leq +\infty$ de la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ está dado por

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\lim\sqrt[n]{|a_n|}} & \text{si } \lim\sqrt[n]{|a_n|} > 0 \\ +\infty & \text{si } \lim\sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}.$$

La relación $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ para toda $x \in I$ se sigue del hecho de que la convergencia de la serie de derivadas $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ es uniforme en todo intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo $I$.

### Nota

Si tenemos definida una función mediante una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, el teorema anterior nos dice que esta función es derivable y que su derivada la podemos obtener derivando la serie término a término.

Como corolario tenemos el siguiente.

### Teorema

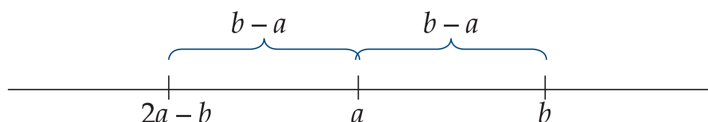
Sea $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0<R\leq +\infty$. Entonces la función límite $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ tiene derivadas de todos los órdenes en el intervalo de convergencia.

## 5.12 Una reflexión sobre el intervalo de convergencia

Si el radio de convergencia $R$ de una serie de potencias $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$ es finito, el intervalo de convergencia es el intervalo abierto $(a-R, a+R)$. En los extremos de este intervalo, la serie puede converger en alguno de ellos, en los dos o en ninguno. Por ejemplo, la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n$ tiene por

intervalo de convergencia el intervalo $(-1, 1)$. Esta serie diverge en $x=1$ pues es la serie armónica $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ pero converge en $x=-1$, pues se trata de la serie alternante $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$. Por otra parte, la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}x^n$ que tiene el mismo intervalo de convergencia $(-1, 1)$, converge en ambos extremos, pues se trata de las series $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ y $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, respectivamente. Finalmente, la serie $\sum_{n\geq 1}x^{2n}$ tiene el mismo intervalo de convergencia $(-1, 1)$, pero diverge en ambos extremos.

Si una serie de potencias $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ converge en un punto $b>a$ entonces converge en todo punto $a<c<b$. Más aún, todos los puntos del intervalo abierto con centro $a$ y radio $b-a$ también estarán en el intervalo de convergencia. Es decir, si un punto $b>a$ está en el intervalo de convergencia, entonces el intervalo abierto con centro $a$ y radio $b-a$, que es $(2a-b, b)$ está contenido en el intervalo de convergencia.




Por tanto, si una serie $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)$converge para todo $b>a$, entonces converge en todo $\mathbb{R}$. En particular, si una serie de la forma $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ converge en algún real $r>0$, entonces también converge en el intervalo abierto $(-r, r)$ Si converge para todo $r>0$, entonces converge en $\mathbb{R}$.

## 5.13 Series de potencias de algunas funciones elementales

En la sección anterior hemos determinado la función límite de algunas series de potencias. Por ejemplo tenemos

$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^k = \frac{1}{1-x}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}$$

Todas ellas con intervalo de convergencia $-1<x<1$.

Ahora planteamos un problema inverso. Dada una función f definida en un intervalo abierto $I$ y un punto $a\in I$, hallar una serie de potencias de la forma $\sum_{n\geq 0}a_n(x-a)^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-a)^n \text{ para toda } x \text{ en un intervalo abierto con centro } a.$$

Ahora nos ocuparemos de este problema, digamos que no estaremos interesados en hallar el límite de una serie de potencias dada, sino en descubrir la serie a partir de su límite. En este sentido es un problema inverso. Otra forma de expresar lo anterior es que ahora miramos las series de potencias como una posible forma de representar una función alrededor de un punto $a$.

Del teorema anterior, sabemos que las funciones definidas mediante una serie de potencias deben ser derivables, más aún, deben tener derivadas de todos los órdenes. En este sentido, las funciones que son límites de series de potencias son muy bien comportadas. Así que si aspiramos a representar una función $f$ como una serie de potencias en una vecindad de un punto $a$, la función al menos debe tener derivadas de todos los órdenes en esa vecindad. Hallemos representaciones en serie de algunas funciones importantes.

## 5.13.1El residuo del teorema de Taylor

Como se sabe del curso de cálculo diferencial, el teorema de Taylor de orden $n$ establece que si tenemos una función $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto $I$ y $a \in I$, entonces para cada punto $x>a$ existe un punto $a<x_0<x$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

El punto $x_0$ depende en general de $n$ y de $x$. Al término

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

le llamamos el residuo de Taylor de orden $n$, el cual depende de $n$ y de $x$. Este residuo de hecho cumple

$$R_n(x) = f(x) - \left[ f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right].$$

Si la función $f$ tiene derivadas de todos los órdenes en $I$, entonces para cada natural $n$ tenemos definida una sucesión de residuos $R_n(x)$. También tenemos definida una serie cuya sucesión de sumas parciales es

$$s_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Con esta notación tenemos

$$R_n(x) = f(x) - s_n(x).$$

Si para alguna $x>a$ se cumple $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, tenemos $\lim_{n\to\infty}\left[ f(x) - s_n(x) \right] = 0$. Esto significa que la serie converge a $f(x)$, es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Así que para expresar una función $f$ que tiene derivadas de todos los órdenes, como el límite de una serie de potencias $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, podemos determinar los valores de $x$ para los cuales $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Para esos valores de $x$ se tendrá $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, a una serie tal le llamaremos serie de Taylor en el punto $a$ o alrededor del punto $a$.

## 5.13.2 Una reflexión sobre la serie de Taylor $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Por una parte ya hemos visto que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, significa $\lim_{n\to\infty}\left[f(x) - s_n(x)\right] = 0$, es decir $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. Así que en este caso tenemos $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Por otra parte podemos estudiar la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ que por derecho propio y de manera independiente es objeto de estudio. Esta serie, como cualquier otra, tendrá su intervalo de convergencia y su propio límite, el cual no necesariamente tendría que ser $f(x)$, pues para que este sea su límite se requiere que se cumpla $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. En otras palabras, se requiere que la diferencia $f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ tienda a cero. Esto no necesariamente ocurre. Esta interesante situación es el caso de la función del siguiente ejemplo.

**Ejemplo 28**

Definamos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función tiene derivadas de todos los órdenes en todo $x \in \mathbb{R}$, además

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la serie de Taylor de esta función en el punto $a$ es $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \equiv 0$, es decir, la serie cuyos términos son todos la función constante cero. Entonces esta serie converge a cero para todo real $x$, su intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$. Por tanto es falso que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) - 0$$

tienda a cero para $x \neq 0$. Esto significa que es falso que se cumpla $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ para alguna $x \neq 0$.

Ahora veamos algunos ejemplos para los cuales las funciones pueden representarse como límites de series de potencias. Para nuestros ejemplos vamos a requerir el siguiente interesante resultado.

### 5.13.3 El límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Mostremos que para todo real $x$ fijo se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,.$$

Para ello observemos que si $n$ es un natural entonces

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{x}{k+1}\cdots\frac{x}{n+1}$$

para cualquier natural $k < n+1$.
Sea $k$ cualquier natural fijo tal que $2x<k$, es decir $\dfrac{x}{k} < \dfrac{1}{2}$. Entonces $\dfrac{x}{m} < \dfrac{1}{2}$ para todo $m>k$. Por tanto para todo natural $n > k$ se tiene

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^k}{k!}\cdot\overbrace{\frac{x}{k+1}\cdots\frac{x}{n+1}}^{n+1-k \text{ factores}} < \frac{x^k}{k!}\frac{1}{2^{n+1-k}}\,.$$

Es decir

$$0 < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{x^k}{k!}\frac{2^k}{2^{n+1}}.$$

*Como* $k$ y $x$ son fijos, el miembro derecho tiende a cero cuando $n \to +\infty$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

### 5.13.4 Serie de Taylor de la función exponencial $f(x)=e^x$

Para la función $f(x)=e^x$ tenemos $f^{(n)}(0)=1$ para todo entero $n\geq 0$, así que para todo $x>0$ existe $0<x_0<x$ tal que

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Es decir

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Como $0 < x_0 < x$ tenemos $e^{x_0} < e^x$ y

$$0 \leq \frac{e^{x_0}}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Por lo justamente probado, para $x$ fija tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} = 0\,.$$

Por tanto, por el teorema del sándwich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_0}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0.$$

Esto prueba que la serie de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ converge a la función exponencial $f(x)=e^x$ en todo real $x$, es decir

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

## 5.13.5 Serie de Taylor de la función sen $x$

Del desarrollo de Taylor de la función seno, para todo entero positivo impar $n=2k-1$ y $x>0$ existe $0<x_0<x$ tal que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1} + (-1)^k \frac{\operatorname{sen} x_0}{(2k)!}x^{2k}.$$

Para probar que la serie de Taylor converge a sen $x$ para cualquier $x>0$ fija debemos probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^k \frac{\operatorname{sen} x_0}{(2k)!}x^{2k}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\operatorname{sen} x_0\right|}{(2k)!}x^{2k} = 0.$$

Pero esto se sigue del hecho ya probado $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$, pues $|\operatorname{sen} x_0|\leq 1$. Así que tenemos

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

## 5.13.6 Serie de Taylor de la función cos $x$

Como en el caso anterior, para todo entero positivo par $n=2k$ y todo $x>0$ existe $0<x_0<x$ tal que

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} + (-1)^{k+1}\frac{\cos x_0}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Para probar que la serie de Taylor converge a cos $x$ para todo $x>0$ fija probemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\cos x_0\right|}{(2k+1)!}x^{2k+1} = 0.$$

Pero esto es consecuencia del hecho $|\cos x_0|\leq 1$ independientemente del punto $x_0$ y de lo ya probado $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$. Por tanto tenemos

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k} \text{ para todo } x \in R.$$

## 5.13.7 Serie de Taylor de la función arctan $x$

Si $r \neq 1$ sabemos que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Sustituyendo $r = -v$, obtenemos

$$1 - v + v^2 - v^3 + \cdots + (-1)^n v^n = \frac{1 + (-1)^n v^{n+1}}{1 + v}.$$

Esta última igualdad es cierta para $v \neq -1$. Por tanto, al hacer $v = u^2$, tenemos

$$1 - u^2 + u^4 - u^6 + \cdots + (-1)^n u^{2n} = \frac{1 + (-1)^n u^{2n+2}}{1 + u^2}.$$

De donde

$$\frac{1}{1 + u^2} = 1 - u^2 + u^4 - u^6 + \cdots + (-1)^n u^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} u^{2n+2}}{1 + u^2}.$$

Esta igualdad es cierta para todo real $u$. Integrando ambos miembros en $[0, x]$ obtenemos

$$\int_0^x \frac{1}{1 + u^2} = \int_0^x (1 - u^2 + u^4 - u^6 + \cdots + (-1)^n u^{2n}) du + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{u^{2n+2}}{1 + u^2} du..$$

O sea

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)n \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{u^{2n+2}}{1 + u^2} du.$$

De aquí obtenemos

$$\left| \arctan x - \left[ x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} \right] \right| = \left| \int_0^x \frac{u^{2n+2}}{1 + u^2} du \right| \leq \int_0^x \left| \frac{u^{2n+2}}{1 + u^2} \right| du.$$

Dado que para $0 < x < 1$

$$\int_0^x \left| \frac{u^{2n+2}}{1 + u^2} \right| du \leq \int_0^x u^{2n+2} du = \frac{x^{2n+3}}{2n + 3},$$

obtenemos finalmente que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \arctan x - \left[ x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} \right] \right| = 0.$$

Esto prueba que

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n + 1} x^{2n+1} + \cdots.$$

Es decir

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} x^{2n+1} \text{ para toda } -1 < x < 1.$$

Por cierto, para $x{=}1$ esta serie converge pues se trata de la serie alternante $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ y diverge para $x{=}-1$. Sin embargo la función $\arctan x$ está definida en todos los reales, así que la serie la representa solo en $(-1, 1)$ pero no fuera de este intervalo.

Recordemos que $\frac{\pi}{4} = 1$, así que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. De aquí obtenemos la bella fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

## 5.13.8 Serie de Taylor de la función $\log(1-x)$

Consideremos nuevamente la suma geométrica

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ para } x\neq 1.$$

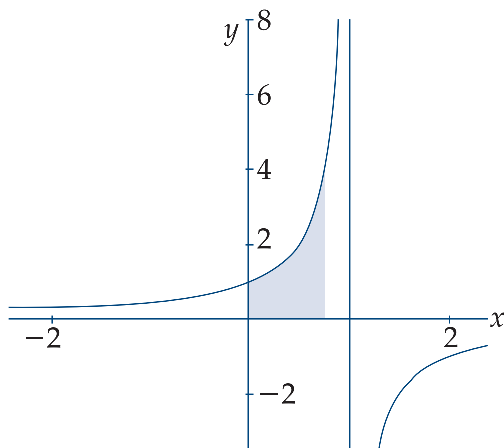
De aquí obtenemos

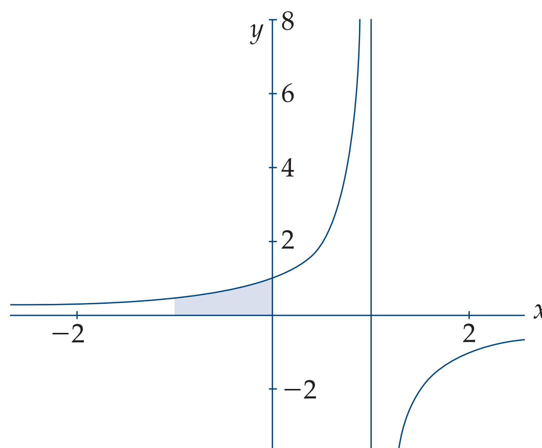
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}}{1-x} \text{ para } x\neq 1.$$

Integrando ambos miembros obtenemos

$$\int_0^x \frac{1}{1-u}du = x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \int_0^x \frac{u^{n+1}}{1-u}du \text{ para } x<1.$$

En las figuras de abajo se muestran las regiones correspondientes a $0 < x < 1$ y $x < 0$.




Primero supongamos $x\leq 0$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{u^{n+1}}{1-u}du\right| &= \left|-\int_x^0 \frac{u^{n+1}}{1-u}du\right| \\ &\leq \int_x^0 \frac{\left|u^{n+1}\right|}{\left|1-u\right|}du \\ &\leq \int_x^0 (-u)^{n+1}du.\end{aligned}$$

Es decir

$$\left|\int_0^x \frac{u^{n+1}}{1-u}du\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{n+2}.$$

Si ahora suponemos $-1 \leq x \leq 0$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+2}}{n+2} = 0$, por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^x \frac{1}{1-u}du - \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]\right| = 0 \text{ para } -1 \leq x \leq 0.$$

Ahora consideremos $0 \leq x < 1$. En este caso

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{u^{n+1}}{1-u}du\right| &\leq \int_0^x \frac{|u^{n+1}|}{|1-u|}du \\ &\leq \int_0^x \frac{u^{n+1}}{1-x}du \\ &= \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}.\end{aligned}$$

Así que para $0 \leq x \leq 1$ fija

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^x \frac{u^{n+1}}{1-u}du\right| = 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^x \frac{1}{1-u}du - \left[x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]\right| = 0 \text{ para } 0 \leq x < 1.$$

Hemos probado que

$$\int_0^x \frac{1}{1-u}du = x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \text{ para } -1 \leq x < 1.$$

Es decir

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \text{ para } -1 \leq x < 1.$$

O sea

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \text{ para } -1 \leq x < 1.$$

En particular haciendo $x=-1$, obtenemos el interesante resultado

$$\log(2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

**Nota**

La fórmula

$$\log(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$$

para $-1\leq x<1$ se obtiene fácilmente integrando término a término la serie

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \text{ para } -1\leq x<1,$$

pues esta serie converge uniformemente en todo intervalo de la forma $[x,0]$ y $[0,x]$, así que la integral del límite se puede obtener *i*ntegrando término a término. Sin embargo, el caso $x=-1$ no queda cubierto mediante este procedimiento por lo que debe tratarse por separado.

## 5.13.9 Desarrollo en serie de funciones de la función log *x*

Si en la fórmula

$$\log(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots$$

la cual vale para $-1<x<1$, reemplazamos $x$ por $-x$, obtenemos

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

Esta fórmula también es válida para $-1<x<1$. De aquí obtenemos

$$\log(1+x)-\log(1-x)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right].$$

O sea

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}.$$

Es decir

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right]=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}.$$

Una de las virtudes de esta fórmula es que la función $\frac{1+x}{1-x}$ toma como valor cualquier real positivo. Es decir, si $y$ es cualquier real positivo, existe $-1<x<1$ tal que $y=\frac{1+x}{1-x}$. Para obtener tal $x$ simplemente la despejamos de esta relación con lo que obtenemos

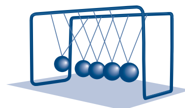
$$x=\frac{y-1}{y+1}.$$

Usando esta relación podemos escribir

$$\log y=2\left[\frac{y-1}{y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^7+\cdots\right]=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k-1}}{2k-1}.$$

Esta fórmula vale para todo $y>0$.

# 5.14 Problemas y ejercicios



1. Sean $(f_n)$ y $(g_n)$ dos sucesiones de funciones $f_n, g_n$: D→ℝ que convergen puntualmente a las funciones $f$ y $g$ respectivamente. Pruebe que

   *a*) $(f_n) + (g_n) = (f_n + g_n)$ converge puntualmente a $f + g$.
   *b*) Si $\lambda$ es cualquier real, $\lambda(f_n) = (\lambda f_n)$ converge puntualmente a $\lambda f$.
   *c*) Si $h$ es cualquier función D→ℝ, $h(f_n) = (hf_n)$ converge puntualmente a $hf$.
   *d*) $(f_n)(g_n) = (f_n g_n)$ converge puntualmente a $gf$.

2. Sean $(f_n)$ y $(g_n)$ dos sucesiones de funciones $f_n, g_n$:D→ℝ que convergen uniformemente a las funciones $f$ y $g$, respectivamente. Pruebe que la sucesión suma $(f_n) + (g_n) = (f_n + g_n)$ converge uniformemente a $f + g$.

3. Usando directamente la definición de convergencia uniforme, pruebe que si $f_n(x) = x^n$ para toda $x \in [0,1]$, entonces la sucesión $(f_n)$ converge puntualmente a la función $f$ definida como $f(x) = 0$ para $x \in [0,1)$ y $f(1) = 1$, pero no converge uniformemente.

4. Si $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ para toda $x \in [0,1]$. Pruebe que la sucesión $(f_n)$ converge puntualmente a la función constante cero. Demuestre el hecho interesante de que el valor máximo de todas las funciones $f_n$ es $\frac{1}{4}$. Corrobore entonces que la sucesión no es uniformemente convergente.

5. Pruebe que la sucesión de funciones $(n^2x(1-x^2)^n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función constante cero en el intervalo $[0,1]$, pero no converge uniformemente.

6. Halle la sucesión de integrales de las funciones de la sucesión $(n^2x(1-x^2)^n)_{n\geq 1}$. Verifique que la sucesión de integrales de la sucesión no converge a la integral del límite.

7. Pruebe que la sucesión de funciones $(nx(1-x)^n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente a la función constante cero en el intervalo $[0,1]$, pero no converge uniformemente. Demuestre que sin embargo la sucesión de integrales converge a la integral del límite.

8. Sean $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$ definidas como $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ para toda $x \in (0,1)$ y toda $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $(f_n)$ converge puntualmente pero no uniformemente.

9. Sean $(g_n)$ una sucesión de funciones $g_n:(0,1)\to\mathbb{R}$ definidas como $g_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ para toda $x \in (0,1)$ y toda $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $(g_n)$ converge uniformemente a la función constante cero en $(0,1)$.

10. Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = \frac{1}{x}$ para toda $x \in (0,1)$ y toda $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $(f_n)$ es una sucesión constante. Entonces trivialmente $(f_n)$ converge uniformemente en $(0,1)$. Usando este hecho y el resultado del ejercicio 4 pruebe que el producto $(f_n g_n)$ de dos sucesiones $(f_n)$ y $(g_n)$ uniformemente convergentes no necesariamente es uniformemente convergente.

11. Pruebe que la sucesión de funciones $\left(\frac{x}{1+nx^2}\right)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en todos los reales.

12. Pruebe que la serie $\sum_{n\geq 0} x^n(1-x)$ converge puntualmente pero no uniformemente en el intervalo $[0,1]$. Halle y grafique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x)$.

13. Pruebe que la serie $\sum_{n\geq 0} x^{2n}(1-x)$ converge puntualmente pero no uniformemente en el intervalo $[0,1]$. Halle su límite $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)$.

**14.** Pruebe que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ en el intervalo [0, 1].

**15.** Pruebe que la serie $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n (1-x)$ converge uniformemente en el intervalo [0,1].

**16.** Pruebe que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n \operatorname{sen} nx$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$ si la serie $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge.

**17.** Pruebe que la serie $\sum_{n\geq 0} (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \operatorname{con} nx)$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$ si las series $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ y $\sum_{n\geq 0} |b_n|$ convergen.

**18.** Halle la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de la función $f(x)=e^{-x}$.

**19.** Halle la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de la función $f(x)=e^{x^2}$.

**20.** Halle la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de la función $f(x)=e^{-x^2}$.

# APÊNDICE



# Integral de Riemann

## Funciones acotadas

Aquí definiremos la integral de Riemann en su forma general; lo haremos para funciones no necesariamente continuas o continuas por piezas, solo pediremos que las funciones sean acotadas en el intervalo de integración. Por lo anterior, en lo que sigue siempre supondremos que $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado y que toda función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, lo que significa que existen reales $m$ y $M$ tales que

$$m \leq f(x) \leq M \text{ para toda } x \in [a, b].$$

Si $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, el **supremo** de $f$, que denotaremos por $\sup\limits_{[a,b]} f$, es el supremo del conjunto de valores $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ y el **ínfimo** de $f$, que denotaremos por $\inf\limits_{[a,b]} f$, es el ínfimo del mismo conjunto, esto es

$$\sup_{[a,b]} f = \sup\left\{ f(x) \mid x \in [a,b] \right\} \quad \text{e} \quad \inf_{[a,b]} f = \inf\left\{ f(x) \mid x \in [a,b] \right\}.$$

En ocasiones, y cuando no dé lugar a confusión, escribiremos $\sup f$ e $\inf f$ en lugar de $\sup\limits_{[a,b]} f$ e $\inf\limits_{[a,b]} f$, respectivamente. Por definición, de supremo de un conjunto tenemos que si $M$ es cualquier cota superior de $f$, entonces $\sup f \leq M$. De manera similar, si $m$ es cualquier cota inferior de $f$, entonces $m \leq \inf f$.

Si $J \subset [a, b]$, el supremo y el ínfimo de $f$ en $J$ son respectivamente

$$\sup_{x\in J} f = \sup\left\{ f(x) \mid x \in J \right\} \quad \text{e} \quad \inf_{x\in J} f = \inf\left\{ f(x) \mid x \in J \right\}.$$

Que $M$ sea el supremo de $f$ en $J$ significa:

i) $f(x) \leq M$ para toda $x \in J$.
ii) Para toda $\varepsilon > 0$ existe $x \in J$ tal que $M - \varepsilon < f(x) \leq M$ (ningún número menor que $M$ puede ser cota superior de $f$).

De igual modo, que $m$ sea el ínfimo de $f$ en $J$ significa:

i) $m \leq f(x)$ para toda $x \in J$.
ii) Para toda $\varepsilon > 0$ existe $x \in J$ tal que $m \leq f(x) < m + \varepsilon$ (ningún número mayor que $m$ puede ser cota inferior de $f$).

## Particiones y sumas de Riemann

Para definir la integral de Riemann, primero veamos la definición de suma de Riemann, para lo cual es necesario recordar alguna terminología acerca de particiones de un intervalo.

Así pues, recuérdese que una **partición** de un intervalo $[a, b]$, que denotaremos por $\wp$, es toda colección finita de puntos $[a, b]$ ordenados de menor a mayor $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Con frecuencia escribiremos

$$\wp = \left\{ x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \right\}.$$

en cuyo caso debemos entender que $x_0 = a$ y $x_n = b$.

En este caso, a cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ le llamaremos **subintervalo** de la partición $\wp$ y a la máxima de las longitudes $x_i - x_{i-1}$ la denotaremos por $\delta(\wp)$ y la denominaremos la **malla** de la partición $\wp$, esto es

$$\delta(\wp) = \text{máx}\left\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\right\}.$$

### Definición

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\wp = \{x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\wp$, elijamos un punto $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

A la sumatoria $R(f, \wp) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ le llamaremos una **suma de Riemann** asociada a la partición $\wp$ de $[a, b]$.

Para cada partición $\wp$ hay una infinidad de sumas de Riemann, una suma para cada elección de puntos $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, así que una mejor notación para la suma de Riemann es

$$R\left(f, \wp, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Sin embargo, a menos que cause confusión, usaremos $R(f, \wp)$ en lugar de $R(f, \wp\{t_1, t_2, \ldots t_n\})$ para denotar a una suma de Riemann. La sumatoria $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ también la escribiremos como

$$\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Por ejemplo, un enunciado como "sean $R(f, \wp_1)$ y $R(f, \wp_2)$ dos sumas de Riemann", quiere decir que $\wp_1$ y $\wp_2$ son dos particiones de $[a, b]$ y que $R(f, \wp_1)$ es una suma de Riemann de la forma $\sum_{\wp_1} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ y $R(f, \wp_2)$ una suma de Riemann de la forma $\sum_{\wp_1} f(s_i)(y_i - y_{i-1})$. El número de puntos de $\wp_1$ no es necesariamente el mismo que el número de puntos de $\wp_2$ y por supuesto puede ocurrir que ambas particiones no tengan puntos en común.

Cuando todos los puntos de una partición $\wp$ son puntos de otra partición $\wp*$, es decir $\wp \subset \wp*$ diremos que la partición $\wp*$ es **más fina** que $\wp$ o que $\wp*$ es un **refinamiento** de $\wp$. Así que un refinamiento de una partición $\wp$ se obtiene agregándole puntos a la partición. Si tenemos dos particiones $\wp_1$ y $\wp_2$, entonces la unión de estas $\wp_1 \cup \wp_2 = \wp*$ es un refinamiento de cada una, en este caso diremos que $\wp*$ es un refinamiento común de ambas particiones.

Observemos que si $\wp*$ es un refinamiento de $\wp$, entonces la malla de $\wp*$ es menor o igual que la malla de $\wp$, esto es: $\delta(\wp*) \leq \delta(\wp)$.

## Definición de integral de Riemann

Procedamos ahora a establecer la definición de integral de Riemann, que en términos imprecisos es el límite, cuando este existe, de las sumas de Riemann $\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ cuando las mallas $\delta(\wp)$ de las particiones $\wp$ tienden a cero; precisemos esta idea.

### Definición

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Decimos que $f$ es **Riemann integrable** en el intervalo $[a, b]$ si hay un número $I$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con la propiedad de que

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon$$

para toda partición $\wp$ de $[a, b]$ con $\delta(\wp) < \delta$ y toda elección de puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$.

### Proposición

Si $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces existe a lo más un número $I$ que cumple con la definición anterior.

### Demostración

Supóngase que existen dos números, $I_1$ e $I_2$, que cumplen con la definición; probaremos que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene $|I_1 - I_2| < \varepsilon$. De aquí se concluirá que $|I_1 - I_2| = 0$, o sea $I_1 = I_2$. Sea pues $\varepsilon > 0$ arbitraria. Por definición de $I_1$, existe $\delta_1$ tal que

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda partición $\wp$ de $[a, b]$ con $\delta(\wp) < \delta_1$ y toda elección de puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$. De modo similar, por definición de $I_2$, existe $\delta_2$ tal que

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda partición $\wp$ de $[a, b]$ con $\delta(\wp) < \delta_2$ y toda elección de puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$. Sea $\wp$ una partición de $[a, b]$ que cumple simultáneamente $\delta(\wp) < \delta_1$ y $\delta(\wp) < \delta_2$. Elijamos puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$. Entonces, se cumple

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I_1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De estas dos desigualdades se obtiene

$$\begin{aligned} |I_1 - I_2| &= \left|I_1 - \sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I_2\right| \\ &\leq \left|I_1 - \sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| + \left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I_2\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Que es lo que deseábamos probar. Esto demuestra la proposición.

### Definición

Si una función $f\colon[a, b] \to \mathbb{R}$ acotada es Riemann integrable, al único número $I$ que satisface la definición se le llama la **integral de Riemann** de $f$ sobre $[a, b]$ y se le denota por cualquiera de los siguientes símbolos

$$\int_a^b f$$

O bien

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

El término Riemann integrable y el nombre propio integral de Riemann se debe a que en la literatura matemática existen otros conceptos de integral, los cuales tienen otros nombres propios; pero, dado que nosotros solo estudiaremos el concepto de integral antes expuesto, nos referiremos a esta con el nombre simple de **integral** de $f$.

Si bien el concepto de límite (de reales) se percibe en la definición de integral, este no se encuentra explícito ahí. Es común que entre estudiantes y profesores se conciba la integral definida como un límite y ciertamente lo es, pero la definición de integral no está establecida en estos términos, al menos en términos de los conceptos de límite conocidos, como es el de sucesiones o el de funciones, para poner la integral en el contexto de límites de sucesiones es necesario extraer, de la definición de integral definida, el recurso de su cálculo mediante límites de sucesiones, acción esto lo haremos a continuación.

### Teorema

Si una función $f\colon[a, b] \to \mathbb{R}$ acotada es Riemann integrable, entonces para toda sucesión de particiones $(\wp_m)$ y toda sucesión de sumas de Riemann

$$R(f, \wp_m) = R\left(f, \wp_m, \{t_i\}\right) = \sum_{\wp_m} f(t_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

tenemos

$$\lim_{m\to\infty} R\left(f, \wp_m\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

con tal de que la sucesión de mallas $(\delta(\wp_m))$ tienda a cero.

Este teorema nos dice que si una función $f$ es integrable, podemos calcular su integral mediante cualquier sucesión de sumas de Riemann.

### Demostración

La prueba es muy simple; lo importante para llevarla a cabo es la hipótesis de que la función $f$ sea integrable. En efecto, que $f$ sea integrable significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición $\wp$ con malla menor que $\delta$ se cumple

$$\left|R\left(f, \wp, \{t_i\}\right) - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{\wp} f(t_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

para toda selección de puntos $\{t_i\}$ en los subintervalos de $\wp$. Supongamos que tenemos una sucesión de particiones $(\wp_m)$ tal que $\delta(\wp_m) \to 0$ y una sucesión de sumas Riemann $R(f, \wp_m)$ asociada a esta sucesión de particiones, mostremos que

$$\lim_{m\to\infty} R\left(f, \wp_m\right) = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

Se trata de una sucesión de reales $R(f, \wp_m)$, así que simplemente mostraremos que cumple con la definición de límite de una sucesión de reales. Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Tomemos $\delta > 0$ tal que cumple

$$\left|R\left(f, \wp,\{ti\}\right) - \int_a^b f\left(x\right)dx\right| < \varepsilon$$

para toda partición $\wp$ con malla menor que $\delta$ y toda selección de puntos $\{t_i\}$ en los subintervalos de $\wp$. Como $\delta(\wp_m) \to 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\delta(\wp_m)| = \delta(\wp_m) < \delta$ para todo natural $m \geq N$; entonces, se tiene

$$\left|R\left(f, \wp_m\right) - \int_a^b f\left(x\right)dx\right| < \varepsilon$$

para todo natural $m \geq N$. Esto prueba el teorema.

**Nota**

Para una sucesión de particiones $(\wp_m)$ hay una infinidad de maneras de construir una sucesión de sumas de Riemann $R\left(f, \wp_m,\{t_i\}\right) = \sum_{\wp_m} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$; cada sucesión de sumas de Riemann corresponde a la selección de los puntos $\{t_i\}$ que hagamos en los subintervalos de cada partición $\wp_m$. Sin embargo, obtenemos como límite $\lim_{m\to\infty} R(f, \wp_m)$ la integral $\int_a^b f(x)dx$, para cualquier sucesión de particiones $(\wp_m)$, y cualquier selección de puntos $\{t_i\}$ con tal de que $\lim_{m\to\infty} \delta\left(\wp_m\right) = 0$ . El recíproco del teorema anterior también es cierto.

## Teorema

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.

Supóngase que para toda sucesión de particiones $(\wp_m)$ y toda sucesión de sumas de Riemann

$$R\left(f, \wp_m,\{t_i\}\right) = \sum_{\wp_m} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Existe el límite

$$\lim_{m\to\infty} R\left(f, \wp_m\right)$$

con tal de que la sucesión de mallas $(\delta(\wp_m))$ tienda a cero. Entonces, el límite $I$ es independiente de la sucesión de particiones y de los puntos que se elijan en los subintervalos de cada partición $\wp_m$. Además, $f$ es Riemann integrable y $\int_a^b f\left(x\right)dx = I$ .

### Demostración

Primero, probemos que todas las sucesiones de sumas Riemann $R(f, \wp_m)$ tienen un mismo límite; para ello, es suficiente probar que para cualesquiera dos sucesiones de sumas de Riemann asociadas a dos sucesiones de particiones $(\wp_m)$ y $(\wp'_m)$, cuyas sucesiones de mallas tienden a cero, se cumple $\lim_{m\to\infty} R(f, \wp_m) = \lim_{m\to\infty} R(f, \wp'_m)$.

Sean pues $(\wp_m)$ y $(\wp'_m)$ dos sucesiones de particiones tales que $\lim_{m\to\infty} \delta(\wp_m) = 0$ y $\lim_{m\to\infty} \delta(\wp'_m) = 0$. Sean

$$\lim_{m\to\infty} R(f, \wp_m) = I \text{ y } \lim_{m\to\infty} R(f, \wp'_m) = I'.$$

Ahora, mostremos que $I=I'$. Para eso, consideremos la sucesión $(\wp^*_m)$ de particiones que construimos intercalando las particiones de las sucesiones $(\wp_m)$ y $(\wp'_m)$. Es decir

$$(\wp^*_m): \quad \wp_1, \wp'_1, \wp_2, \wp'_2, \wp_3, \wp'_3, \ldots$$

Consideremos la sucesión de sumas de Riemann correspondiente:

$$\left(R\left(f, \wp^*_m\right)\right): \quad R\left(f, \wp_1\right), R\left(f\, \wp'_1\right), R\left(f, \wp_2\right), R\left(f, \wp'_2\right), \ldots$$

Como $\lim_{m\to\infty} \delta(\wp_m) = 0$ y $\lim_{m\to\infty} \delta(\wp'_m) = 0$, se tiene $\lim_{m\to\infty} \delta(\wp^*_m) = 0$; entonces, existe $\lim_{m\to\infty} R(f, \wp^*_m)$. Esto implica que se debe tener $I=I'$.

Ahora, probemos que $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable. Para ello, probemos que el límite común $I$ de todas las sucesiones de Riemann satisface la definición de integral de Riemann; para la prueba razonaremos por contradicción. Supongamos que esto último fuese falso, entonces existiría $\varepsilon_0 > 0$ tal que no habría $\delta > 0$ que satisficiese la definición; es decir, para toda $\delta > 0$ existiría una partición $\wp_\delta$ con malla menor que $\delta$ y una suma de Riemann tal que

$$|R(f, \wp_\delta) - I| \geq \varepsilon_0.$$

En particular, si $m$ es una natural, para $\delta = \frac{1}{m}$ existiría $\wp_m$ con $\delta(\wp_m) < \frac{1}{m}$ y una suma de Riemann $R(f, \wp_m)$ tal que $|R(f, \wp_m) - I| \geq \varepsilon_0$. Entonces, tendríamos una sucesión de particiones $(\wp_m)$ y una sucesión de sumas de Riemann $R(f, \wp_m)$ que no convergería a $I$, lo cual contradiría la hipótesis. Por tanto, esto prueba el teorema.

De lo probado en el capítulo 1, del teorema anterior se sigue que toda función continua es integrable con esta nueva definición de integral de Riemann.

### Teorema

Toda función continua $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y además:

$$\lim_{m\to\infty} R(f, \wp_m) = \int_a^b f(x)\,dx$$

para toda sucesión de sumas de Riemann $R(f, \wp_m)$ con tal que $\lim_{m\to\infty} \delta(\wp_m) = 0$.

En el capítulo 1 se ilustra la definición de integral de Riemann con algunas funciones continuas. Ahora, veamos algunos casos de funciones no continuas.

## Ejemplo 1

Consideremos la función de Dirichlet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Esta función no es integrable en el intervalo [0, 1]. Para probarlo es suficiente exhibir dos sucesiones de sumas de Riemann $R(f, \wp_m)$ y $R(f, \wp'_m)$ que tengan límites diferentes. Para ello, tomemos para cada $m = 1, 2, 3, \ldots$ la partición $\wp_m$ que consiste de los puntos

$$x_k=\frac{k}{m},\ \text{ para }\ k=0,1,\ldots,m.$$

Estos puntos son los que se obtienen al dividir el intervalo [0, 1] en $m$ intervalos de longitud $\frac{1}{m}$.

La malla de $\wp_m$ es $\delta(\wp_m)=\frac{1}{m}$, así que la sucesión de mallas $\delta(\wp_m)$ tiende a cero cuando $m\to\infty$. Ahora, tomemos la misma sucesión de particiones para construir dos sucesiones de sumas de Riemann.

Para la primera sucesión de sumas de Riemann $R(f, \wp_m, \{t_i\})$, tomamos puntos racionales $t_i$ en cada subintervalo de $\wp_m$; así que

$$R\left(f,\ \wp_m,\{t_i\}\right)=\sum_{i=1}^{m}1\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)=1$$

para todo natural $m$. Entonces, tenemos

$$\lim_{m\to\infty}R\left(f,\ \wp_m,\{t_i\}\right)=1.$$

Para la segunda sucesión de sumas de Riemann $R(f, \wp_m, \{s_i\})$, tomemos puntos irracionales $s_i$ en cada subintervalo de $\wp_m$; entonces, tenemos

$$R\left(f,\ \wp_m,\{s_i\}\right)=\sum_{i=1}^{m}0\cdot\left(x_i-x_{i-1}\right)=0$$

para todo natural $m$. De esta manera, tenemos:

$$\lim_{m\to\infty}R\left(f,\ \wp_m,\{s_i\}\right)=0\,.$$

Esto implica que $f$ no es integrable en [0, 1].

Una variante simple de este ejemplo lo constituye el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 2

La función tipo de Dirichlet $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ -1 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

es no integrable en [0, 1].

## Propiedades básicas de la integral

El propósito de los teoremas anteriores es facilitarnos tanto la tarea del cálculo de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, mediante límites de sucesiones de reales, como hacernos más fácil la tarea de demostrar

algunos teoremas sobre funciones integrables. Ahora, veamos algunos de los más básicos (las pruebas las omitimos y las dejamos como ejercicio para el lector).

### Teorema (de linealidad de la integral)

Sean $f$ y $g$ dos funciones acotadas e integrables en un intervalo $[a, b]$, y sean $\alpha$ y $\beta$ dos reales cualesquiera. Entonces, $\alpha f + \beta g$ es integrable y además

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\,.$$

### Teorema (propiedad aditiva de la integral)

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Sea $a < c < b$. Entonces, $f$ es integrable en cada subintervalo $[a, c]$ y $[c, b]$, y además:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

Si definimos:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

cuando $b > a$, entonces tenemos:

### Teorema (propiedad aditiva generalizada de la integral)

Sea $I$ un intervalo y sean $a$, $b$ y $c$ puntos arbitrarios de $I$. Supongamos que existen dos de las tres integrales $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$; entonces, existe la tercera integral y se cumple

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

### Teorema

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ integrable tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0\,.$$

Como corolario inmediato de este teorema tenemos el siguiente teorema.

### Teorema

Sean $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ y $g:[a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables tales que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para toda} \quad x \in [a,b].$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Una consecuencia inmediata es el siguiente teorema.

### Teorema

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sean $M = \sup f$ y $m = \inf f$.

Entonces

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para toda} \quad x \in [a,b] \text{ y}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

## Sumas superiores, sumas inferiores y sumas de Riemann

La definición de integral del capítulo 1 se estableció para funciones continuas, para las cuales la integral siempre existe. Con esta nueva definición, la integral de una función acotada no siempre existe. Por esta razón es importante establecer condiciones necesarias y suficientes para que una función acotada sea Riemann integrable. Algunas de estas condiciones requieren de las sumas superiores y de las sumas inferiores de Riemann; por tanto, vamos a requerir las siguientes definiciones.

### Definición

Si $\wp = \{x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n\}$ es una partición de un intervalo $[a, b]$ y $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, denotamos por $M_k(f)$ el supremo de $f$ en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y por $m_k(f)$ el ínfimo en el mismo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$; es decir

$$M_k(f) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{y} \quad m_k(f) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x$$

Las sumas $S(f, \wp) = \sum_{\wp} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ y $s(f, \wp) = \sum_{\wp} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se denominan, respectivamente, **suma superior** y **suma inferior** de $f$ relativas a la partición $\wp$.

Ahora, vamos a establecer algunas desigualdades para las sumas de Riemann que utilizaremos más adelante.

Puesto que $m_i(f) \leq M_i(f)$ para toda $i$, tenemos $m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1})$. Por tanto

$$\sum_{\wp} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{\wp} M_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Además, dado que para toda elección de puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se tiene $m_i(f) \leq f(t_i) \leq M_i(f)$, tenemos

$$\sum_{\wp} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{\wp} M_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Esta desigualdad es válida para toda partición $\wp$ de $[a, b]$ y cualquier elección de puntos $t_i$ en los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de $\wp$. Por ende, si $\wp$ es una partición de $[a, b]$ y elegimos dos conjuntos de puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces las dos sumas de Riemann respectivas cumplen

$$s(f, \wp) \leq R(f, \wp, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}) \leq S(f, \wp)$$

y

$$s(f, \wp) \leq R(f, \wp, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}) \leq S(f, \wp).$$

Por tanto, la distancia entre las dos sumas de Riemann es menor que la distancia entre la suma superior y la inferior; es decir

$$0 \leq \left| R\left(f, \wp, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}\right) - R\left(f, \wp, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\right) \right| \leq S(f, \wp) - s(f, \wp).$$

O sea

$$0 \leq \left| R\left(f, \wp, \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}\right) - R\left(f, \wp, \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}\right) \right| \leq \sum_{\wp} \left(M_i(f) - m_i(f)\right)\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Esto significa que el número $\sum_{\wp} \left(M_i(f) - m_i(f)\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$ es una cota superior de los valores absolutos de las diferencias de cualesquiera dos sumas de Riemann.

A continuación presentamos una desigualdad que utilizaremos más adelante.

### Teorema

Si $f$ es acotada en $J$, entonces

$$\sup_J f - \inf_J f = \sup\left\{ f(t) - f(s) \mid s, t \in J \right\}.$$

### Demostración

Primero, mostremos que

$$\sup_J f - \inf_J f \leq \sup\left\{ f(t) - f(s) \mid s, t \in J \right\}.$$

Sea $M = \sup\{f(t) - f(s) \mid s, t \in J\}$. Por definición, para cualquier $s \in J$ y cualquier $t \in J$ tenemos

$$f(t) - f(s) \leq M.$$

Entonces, para $s \in J$ fija tenemos $f(t) \leq M + f(s)$. Pero, como $t \in J$ es arbitraria, tenemos que $M + f(s)$ es una cota superior de $f$ en $J$; por tanto

$$\sup_J f \leq M + f(s).$$

Entonces

$$\sup_J f - M \leq f(s).$$

Como esto ocurre para toda $s \in J$, tenemos que $\sup_J f - M$ es una cota inferior de $f$ en $J$; de esta manera,

$$\sup_J f - M \leq \inf_J f.$$

De donde obtenemos la desigualdad

$$\sup_J f - \inf_J f \leq M.$$

Es decir

$$\sup_J f - \inf_J f \le \sup\{f(t) - f(s) \mid s, t \in J\}.$$

Ahora, probemos la desigualdad

$$\sup\left\{f(t) - f(s) \,\middle|_J\, s, t \in J\right\} \le \sup f - \inf_J f.$$

Para toda $t \in J$ tenemos $f(t) \le \sup_J f$, mientras que, por otra parte, también tenemos $\inf_J f \le f(s)$ para toda $s \in J$. Entonces, tenemos las dos desigualdades

$$f(t) \le \sup_J f$$
$$-f(s) \le -\inf_J f.$$

Si sumamos miembro a miembro ambas desigualdades obtenemos

$$f(t) - f(s) \le \sup_J f - \inf_J f.$$

Como $s$ y $t$ fueron elementos arbitrarios de $J$, tenemos que $\sup_J f - \inf_J f$ es una cota superior del conjunto

$$\left\{f(t) - f(s) \,\middle|_J\, s, t \in J\right\}.$$

Entonces, tenemos

$$\sup\left\{f(t) - f(s) \,\middle|_J\, s, t \in J\right\} \le \sup_J f - \inf_J f.$$

Ambas desigualdades probadas demuestran la igualdad

$$\sup_J f - \inf_J f = \sup\{f(t) - f(s) \mid s, t \in J\}.$$

Por tanto, esto prueba el teorema.

Ahora, probemos algunas desigualdades sobre las sumas superiores y las sumas inferiores.

## Proposición

Sea $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean $\wp$ y $\wp*$ particiones de $[a, b]$, tales que $\wp*$ es un refinamiento de $\wp$; entonces, $s(f, \wp) \le s(f, \wp*) \le S(f, \wp*) \le S(f, \wp)$.

## Demostración

Es suficiente probar la afirmación cuando $\wp*$ tiene exactamente un punto más que la partición $\wp$, pues si agregamos de manera sucesiva puntos, de uno en uno, a la partición $\wp$ obtendremos $\wp*$.

Probemos la desigualdad para sumas superiores $S(f, \wp*) \le S(f, \wp)$. La prueba de la otra desigualdad $s(f, \wp) \le s(f, \wp*)$ es similar y se deja como ejercicio para el lector.

Supongamos que $\wp$ es la partición

$$\wp = \{x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n\}$$

y

$$\wp^* = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < y < x_k \cdots < x_{n-1} < x_n\}$$

donde $y$ es el punto extra que tiene $\wp^*$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} S(f, \wp) &= \sum_{\wp} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x_{i-1}) + \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f\,(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos

$$S(f, \wp^*) = \sum_{i=1}^{k-1} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x_{i-1}) + \sup_{[x_{k-1}, y]} f\,(y - x_{k-1}) + \sup_{[y, x_k]} f\,(x_k - y) + \sum_{i=k+1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f\,(x_i - x_{i-1}).$$

Ahora, comparemos $\sup\limits_{[x_{k-1}, y]} f$ con $\sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$. Como $[x_{k-1}, y] \subset [x_{k-1}, x_i]$, entonces para todo $x \in [x_{k-1}, y]$ se tiene $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Esto implica que $\sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$ es una cota superior de $f$ en el intervalo $[x_{k-1}, y]$, lo cual a su vez implica que $\sup\limits_{[x_{k-1}, y]} f \leq \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$. Por su parte, $\sup\limits_{[y, x_k]} f \leq \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$ se obtiene de manera similar. Entonces

$$\sup_{[x_{k-1}, y]} f\,(y - x_{k-1}) + \sup_{[y, x_k]} f\,(x_k - y) \leq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f\,(y - x_{k-1}) + \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f\,(x_k - y) = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f\,(x_k - x_{k-1}).$$

De aquí se sigue que

$$S(f, \wp^*) \leq S(f, \wp).$$

Esto prueba la proposición.

Como corolario inmediato se sigue este interesante teorema.

### Teorema

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, toda suma inferior de $f$ es menor o igual que toda suma superior de $f$; es decir, si $\wp_1$ y $\wp_2$ son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces

$$s(f, \wp_1) \leq S(f, \wp_2).$$

### Demostración

Sean $\wp_1$ y $\wp_2$ dos particiones cualesquiera de $[a, b]$ y sea $\wp^* = \wp_1 \cup \wp_2$ su refinamiento común. Entonces, por la proposición anterior tenemos

$$s(f, \wp_1) \leq s(f, \wp^*) \leq S(f, \wp^*) \leq S(f, \wp_2).$$

Esto prueba el teorema.

Del teorema anterior se desprende que toda suma superior S $(f, \wp^*)$ es una cota superior del conjunto de sumas inferiores

$$\{s(f, \wp) \mid \wp \;\; \text{partición de} \;\; [a, b]\} = \{s(f, \wp)\}.$$

Entonces, por definición de supremo de un conjunto debemos tener

$$\sup\left\{s\left(f,\ \wp\right)\right\}\leq S\left(f,\ \wp^*\right).$$

A su vez, esto implica que sup $\{s(f,\ \wp)\}$ es una cota inferior del conjunto de sumas superiores

$$\left\{S\left(f,\ \wp\right)\middle|\ \wp\quad \text{partición de}\quad \left[a,b\right]\right\}=\left\{S\left(f,\ \wp\right)\right\}.$$

De esta manera, por definición de ínfimo de un conjunto, se tiene

$$\sup\left\{s\left(f,\ \wp\right)\right\}\leq \inf\left\{S\left(f,\ \wp\right)\right\}.$$

Así, hemos probado la siguiente proposición.

### Proposición

Si $f:[a,\ b]\rightarrow\mathbb{R}$ es una función acotada, entonces para toda partición $\wp*$ de $[a,\ b]$ se tiene

$$s\left(f,\ \wp^*\right)\leq\sup\left\{s\left(f,\ \wp\right)\right\}\leq\inf\left\{S\left(f,\ \wp\right)\right\}\leq S\left(f,\ \wp^*\right).$$

## Existencia de la integral de Riemann

De acuerdo con la interpretación geométrica de las sumas superiores y sumas inferiores para funciones positivas, el área bajo la gráfica de la función acotada $f:[a,\ b]\rightarrow\mathbb{R}$ es igual al supremo de las sumas inferiores sup$\{s(f,\ \wp)\}$ e igual al ínfimo de las sumas superiores inf$\{S(f,\ \wp)\}$, al menos esto es lo que se podría esperar, en particular se esperaría que estos dos números fuesen iguales. La razón por la que se esperaría esta igualdad es porque interpretamos las sumas superiores e inferiores con funciones continuas; de hecho, para este tipo de funciones resulta cierta la igualdad. Sin embargo, para otro tipo de funciones esto no siempre ocurre, aunque sí puede darse la igualdad sup$\{s(f,\ \wp)\}$ = inf$\{S(f,\ \wp)\}$ no obstante las discontinuidades de la función. Es precisamente esta igualdad la que nos va a permitir hablar del área "bajo la gráfica de $f$", a la cual nos aproximaremos mediante sumas de Riemann. En la práctica resulta más simple calcular límites de sucesiones de sumas de Riemann que calcular supremos de conjuntos de sumas inferiores o ínfimos de sumas superiores, así que únicamente para fines teóricos vamos a establecer una relación entre límites de sumas de Riemann y la igualdad sup$\{s(f,\ \wp)\}$ = inf$\{S(f,\ \wp)\}$. Prepararemos el camino a recorrer estableciendo primero una forma de probar la igualdad sup$\{s(f,\ \wp)\}$ = inf$\{S(f,\ \wp)\}$, que es el propósito de la siguiente proposición.

### Proposición

Sea $f:[a,\ b]\rightarrow\mathbb{R}$ una función acotada; entonces, se cumple la igualdad

$$\sup\left\{s(f,p)\right\}=\inf\left\{S(f,p)\right\}$$

si y solo si para toda $\varepsilon>0$ existe una partición $\wp*$ de $[a,\ b]$ tal que

$$S\left(f,\ \wp^*\right)-s\left(f,\ \wp^*\right)<\varepsilon.$$

### Demostración

Primero, supongamos que se tiene $\sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\}$. Denotemos por $I$ este valor común, es decir $I=\sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\}$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Por definición de supremo de un conjunto, para la $\varepsilon > 0$ dada existe una suma inferior $s(f, \wp_1)$ tal que

$$\sup\{s(f, \wp)\} - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \wp_1).$$

De modo similar, por definición de ínfimo de un conjunto existe una suma superior $s(f, \wp_2)$ tal que

$$S(f, \wp_2) < \inf\{S(f, \wp)\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\wp* = \wp_1 \cup \wp_2$ el refinamiento común de $\wp_1$ y $\wp_2$. Entonces, tenemos

$$\sup\{s(f, \wp)\} - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \wp_1) \leq s(f, \wp*).$$

y también

$$S(f, \wp*) \leq S(f, \wp_2) < \inf\{S(f, \wp)\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $I= \sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\}$, tenemos entonces

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, \wp*) \text{ y } S(f, \wp*) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

O sea

$$S(f,\wp*) < I + \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } -s(f,\wp*) < \frac{\varepsilon}{2} - I.$$

Al sumar miembro a miembro ambas desigualdades obtenemos la desigualdad deseada

$$s(f, \wp*) - s(f, \wp*) < \varepsilon.$$

Ahora, supongamos que para toda $\varepsilon > 0$ existe una partición $\wp*$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f, \wp*) - s(f, \wp*) < \varepsilon$$

probemos que entonces se tiene

$$\sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\}.$$

Sabemos que $\sup\{s(f, \wp)\} \leq \inf\{S(f, \wp)\}$. Para probar la igualdad mostremos que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene

$$0 \leq \inf\{S(f, \wp)\} - \sup\{s(f, \wp)\} < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Por hipótesis, existe una partición $\wp*$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f,\wp*) - s(f,\wp*) < \varepsilon$$

Por la proposición anterior, tenemos

$$s(f, \wp^*) \leq \sup\{s(f, \wp)\} \leq \inf\{S(f, \wp)\} \leq S(f, \wp^*).$$

Por tanto, de la desigualdad $S(f, \wp*) - s(f, \wp*) < \varepsilon$ se sigue que también se cumple

$$\inf\{S(f, \wp)\} - \sup\{s(f, \wp)\} < \varepsilon.$$

Esto prueba la proposición.

### Nota

Algunos autores de textos de cálculo establecen como definición de existencia de la integral de Riemann de una función $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, cuando se cumple la condición

$$\sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\}$$

y este valor común se define como la integral.

Establecida así la integral, lo que en la práctica procedería para calcularla, cuando se sabe que la función es integrable, sería determinar el supremo $\sup\{s(f, \wp)\}$ o el ínfimo $\inf\{S(f, \wp)\}$; sin embargo, es común que se acuda al cálculo de sumas de Riemann y no al cálculo de supremos o ínfimos de conjuntos. Por esta razón, resulta conveniente conciliar ambos acercamientos, pues las sumas de Riemann son útiles para el cálculo en la práctica y los supremos de sumas inferiores o ínfimos de sumas superiores son de gran utilidad para la teoría. La conciliación consiste en probar que ambos acercamientos son equivalentes; en otras palabras, que conducen al mismo resultado, al mismo valor de la integral. Esto lo determinamos en el siguiente teorema, el cual podemos interpretar como uno donde se establecen condiciones necesarias y suficientes para que una función $f$ sea Riemann integrable en un intervalo $[a, b]$. La demostración es un tanto larga, además de que el lector difícilmente la encontrará en la literatura, por lo que creímos conveniente incluirla como referencia y para aquellos quienes estén interesados en comparar los dos acercamientos más comunes.

### Teorema

Una función $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, es Riemann integrable si y solo si

$$\sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\}$$

Además, en este caso

$$\sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\} = \int_a^b f(x)dx.$$

### Demostración

Supongamos que $f$ es Riemann integrable. Para probar la igualdad

$$\sup\{s(f, \wp)\} = \inf\{S(f, \wp)\}$$

mostraremos que para toda $\varepsilon > 0$ existe una partición $\wp$ de $[a, b]$ tal que

$$S(f,\wp)-s(f,\wp)<\varepsilon.$$

Como $f$ es Riemann integrable, para la $\varepsilon>0$ dada existe $\delta>0$ tal que toda partición $\wp$ con malla menor que $\delta$ cumple

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

para toda elección de puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$, donde $I=\int_a^b f(x)dx$. Sea $\wp$ una partición con malla menor que $\delta$. Entonces, para cualesquiera dos colecciones de puntos $\{t_1,\ldots,t_n\}$ y $\{s_1,\ldots,s_n\}$ elegidos en los subintervalos de $\wp$ tenemos

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ y } \left|\sum_{\wp} f(s_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

De aquí obtenemos:

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{\wp} f(s_i)(x_i-x_{i-1})\right|\leq\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i-x_{i-1})-I\right|+\left|I-\sum_{\wp} f(s_i)(x_i-x_{i-1})\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}.$$

O sea

$$\left|\sum_{\wp}\left[f(t_i)-f(s_i)\right](x_i-x_{i-1})\right|<\frac{2\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, por un teorema que probamos antes, tenemos

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f-\inf_{[x_{i-1},x_i]} f=\sup\left\{f(t)-f(s) \mid s,t\in\left[x_{i-1},x_i\right]\right\}.$$

Por definición de supremo de un conjunto, tenemos que para toda $\varepsilon_1>0$ podemos elegir puntos $s_i$ y $t_i$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\sup\left\{f(t)-f(s) \mid s,t\in\left[x_{i-1},x_i\right]\right\}-\varepsilon_1<f(t_i)-f(s_i).$$

O sea

$$\left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f-\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\right)-\varepsilon_1<f(t_i)-f(s_i).$$

Después de multiplicar ambos miembros por $x_i-x_{i-1}$ y sumar obtenemos

$$\sum_{\wp}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x_i-x_{i-1})-\sum_{\wp}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x_i-x_{i-1})-\sum_{\wp}\varepsilon_1(x_i-x_{i-1})<\sum_{\wp}\left(f(t_i)-f(s_i)\right)(x_i-x_{i-1}).$$

O sea

$$\sum_{\wp}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x_i-x_{i-1})-\sum_{\wp}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x_i-x_{i-1})-\varepsilon_1(b-a)<\sum_{\wp}\left(f(t_i)-f(s_i)\right)(x_i-x_{i-1}).$$

Esta desigualdad vale para toda $\varepsilon_1>0$, en particular si elegimos $\varepsilon_1=\frac{1}{3}\frac{1}{b-a}\varepsilon$. Con lo que obtenemos

$$\sum_{\wp}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\left(x_i-x_{i-1}\right)-\sum_{\wp}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\left(x_i-x_{i-1}\right)-\frac{\varepsilon}{3}<\sum_{\wp}\left(f\left(t_i\right)-f\left(s_i\right)\right)\left(x_i-x_{i-1}\right).$$

Como $\left|\sum_{\wp}\left[f\left(t_i\right)-f\left(s_i\right)\right]\left(x_i-x_{i-1}\right)\right|<\frac{2\varepsilon}{3}$, de aquí obtenemos

$$\sum_{\wp}\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\left(x_i-x_{i-1}\right)-\sum_{\wp}\inf_{[x_{i-1},x_i]} f\left(x_i-x_{i-1}\right)<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon.$$

Esto prueba la primera parte del teorema.

Ahora, supongamos que se cumple la igualdad

$$\sup\left\{s\left(f,\wp\right)\right\}=\inf\left\{S\left(f,\wp\right)\right\}.$$

Sea $I=\sup\{s(f,\wp)\}=\inf\{S(f,\wp)\}$. Probemos que para toda $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para toda partición $\wp$ con malla menor que $\delta$ se cumple

$$\left|\sum_{\wp} f\left(t_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)-I\right|<\varepsilon$$

para toda elección de puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$.

Sea pues $\varepsilon>0$ arbitraria. Por definición de $\sup\{s(f,\wp)\}$, existe $\wp_1$ partición de $[a,b]$ tal que

$$\sup\left\{s\left(f,\wp\right)\right\}-\frac{\varepsilon}{2}<s\left(f,\wp_1\right).$$

De manera similar, por definición de $\inf\{S(f,\wp)\}$, existe una partición $\wp_2$ tal que

$$S\left(f,\wp_2\right)<\inf\left\{S\left(f,\wp\right)\right\}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\wp*$ el refinamiento común $\wp*=\wp_1\cup\wp_2$, entonces tenemos

$$s\left(f,\wp_1\right)\le s\left(f,\wp*\right)\ \text{y}\ S\left(f,\wp*\right)\le S\left(f,\wp_2\right).$$

Por tanto

$$\sup\left\{s\left(f,\wp\right)\right\}-\frac{\varepsilon}{2}<s\left(f,\wp*\right)\le S\left(f,\wp*\right)<\inf\left\{S\left(f,\wp\right)\right\}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $I=\sup\{s(f,\wp)\}=\inf\{S(f,\wp)\}$, tenemos

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<s\left(f,\wp*\right)\le S\left(f,\wp*\right)<I+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces

$$0\le S\left(f,\wp*\right)-s\left(f,\wp*\right)<\varepsilon.$$

Esta desigualdad es válida para la partición particular $\wp*$, la cual supondremos

$$\wp*=\left\{x_0,x_1,\ldots,x_n\right\}.$$

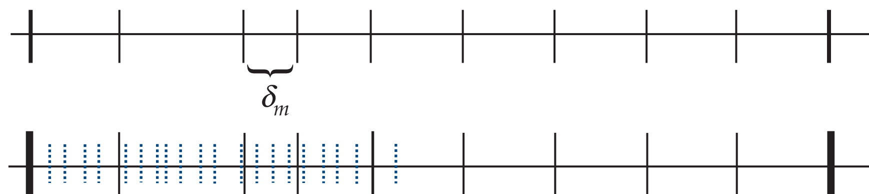
Basados en esta partición mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que toda partición $\wp$ con malla menor que $\delta$ cumple

$$\left|\sum_{\wp} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon$$

para toda elección de puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$.

Sea $\wp = \{y_0, y_1, \dots y_m\}$ una partición de $[a, b]$. Supongamos que $\wp$ es suficientemente fina (es decir, está constituida por un número grande de puntos muy próximos entre sí), de manera que los intervalos $[y_{j-1}, y_j]$ "son tan pequeños" que cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de $\wp*$ contiene al menos un subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ y ningún intervalo $[y_{j-1}, y_j]$ tiene más de un punto $x_i$, como se muestra en la figura siguiente. Esto se logra si la malla de la partición $\wp$ es menor que la menor de las longitudes, a la cual llamaremos $\delta_m$ de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces, sea $\wp$ tal que $\delta(\wp) < \delta_m$.

Las líneas sólidas corresponden a los puntos de $\wp*$ y las líneas punteadas corresponden a la partición fina $\wp$.




En la partición $\wp$ se distinguen dos clases de intervalos: la clase $A_1$ de intervalos $[y_{j-1}, y_j]$ que están contenidos en algún intervalo $x_{i-1}, x_i$ (un intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ puede contener varios intervalos $[y_{j-1}, y_j]$) y la clase $A_2$ de intervalos $[y_{j-1}, y_j]$ que tienen en su interior uno y exactamente un punto $x_i$.

Consideremos la suma superior

$$S(f, \wp) = \sum_{\wp} M_k (y_k - y_{k-1})$$

donde $M_k = \sup\limits_{[y_{k-1}, y_k]} f$. De acuerdo con la clase a la que pertenezcan los intervalos $[y_{j-1}, y_j]$, descomponemos la sumatoria $S(f, \wp) = \sum\limits_{\wp} M_k (y_k - y_{k-1})$ en dos partes: $S_1$ y $S_2$. La primera parte $S_1$ estará formada por los términos $M_j(y_j - y_{j-1})$ correspondientes a los intervalos de la clase $A_1$. Ahora, denotemos por $\sum\limits_{[x_0, x_1]} M_k (y_k - y_{k-1})$ la suma de los términos de $\sum\limits_{\wp} M_k (y_k - y_{k-1})$ correspondientes a todos los intervalos $[y_{j-1}, y_j]$ que están contenidos en $[x_0, x_1]$. Dado que para estos subintervalos $M_k = \sup\limits_{[y_{k-1}, y_k]} f \leq \sup\limits_{[x_0, x_1]} f$ y la suma de las longitudes de estos subintervalos es menor o igual que $x_1 - x_0$, tenemos

$$\sum_{[x_0, x_1]} M_k (y_k - y_{k-1}) \leq \sup_{[x_0, x_1]} f (x_1 - x_0).$$

En general, si denotamos por $\sum\limits_{[x_{i-1}, x_i]} M_k (y_k - y_{k-1})$ la suma de los términos de $\sum\limits_{\wp} M_k (y_k - y_{k-1})$ correspondientes a todos los intervalos $[y_{j-1}, y_j]$ que están contenidos $[x_{i-1}, x_i]$, tenemos

$$\sum_{[x_{i-1}, x_i]} M_k (y_k - y_{k-1}) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f (x_1 - x_0).$$

Entonces, la primera parte $S_1$ de la sumatoria $\sum_{\wp} M_k\left(y_k - y_{k-1}\right)$ es

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{[x_{i-1},x_i]} M_k\left(y_k - y_{k-1}\right)\right).$$

Por tanto, tenemos

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{[x_{i-1},x_i]} M_k\left(y_k - y_{k-1}\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

O sea

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{[x_{i-1},x_i]} M_k\left(y_k - y_{k-1}\right)\right) \leq S\left(f, \wp^*\right).$$

La segunda parte $S_2$ de la sumatoria $\sum_{\wp} M_k\left(y_k - y_{k-1}\right)$ está formada por los términos correspondientes a los subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ que contienen exactamente un punto $x_i$ en su interior, es decir $y_{j-1} < x_i < y_j$. Así que la segunda parte, $S_2$, tendrá a los más $n-1$ sumandos, uno para cada punto $x_1, \ldots, x_{n-1}$, aunque puede tener menos sumandos. De cualquier manera, cada uno de estos términos es drásticamente menor que $\sup_{[a,b]}\left|f\right|\delta(\wp)$, donde, como siempre, $\delta(\wp)$ es la **malla** de $\wp$.

Por tanto, se tendrá

$$S_2 \leq n \sup_{[a,b]} f \delta(\wp).$$

Entonces, tenemos

$$S\left(f, \wp\right) = \sum_{\wp} M_k\left(y_k - y_{k-1}\right) = S_1 + S_2 \leq S\left(f, \wp^*\right) + n \sup_{[a,b]} f \delta(\wp).$$

Si elegimos $\delta_1 > 0$ tal que sea menor que $\delta_m$ y menor que $\dfrac{\varepsilon}{2n \sup_{[a,b]} f}$, entonces $\delta(\wp) < \delta_1$ implicará

$$S\left(f, \wp\right) \leq S\left(f, \wp^*\right) + n \sup_{[a,b]} f \delta(\wp) < S\left(f, \wp^*\right) + \frac{\varepsilon}{2} < I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

O sea

$$S\left(f, \wp\right) < I + \varepsilon.$$

De manera similar se prueba que existe $\delta_2 > 0$, tal que si $\delta(\wp) < \delta_2$ se tiene

$$I - \varepsilon < s\left(f, \wp\right).$$

Entonces, dado que

$$I - \varepsilon < s\left(f, \wp\right) \leq \sum_{\wp} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \leq S\left(f, \wp\right) < I + \varepsilon$$

para toda elección de puntos $t_i$ en los subintervalos de $\wp$, tenemos

$$\left|\sum_{\wp} f\left(t_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) - I\right| < \varepsilon.$$

Esto prueba el teorema.

Enseguida, aplicaremos el teorema anterior para probar que la función del siguiente ejemplo es integrable.

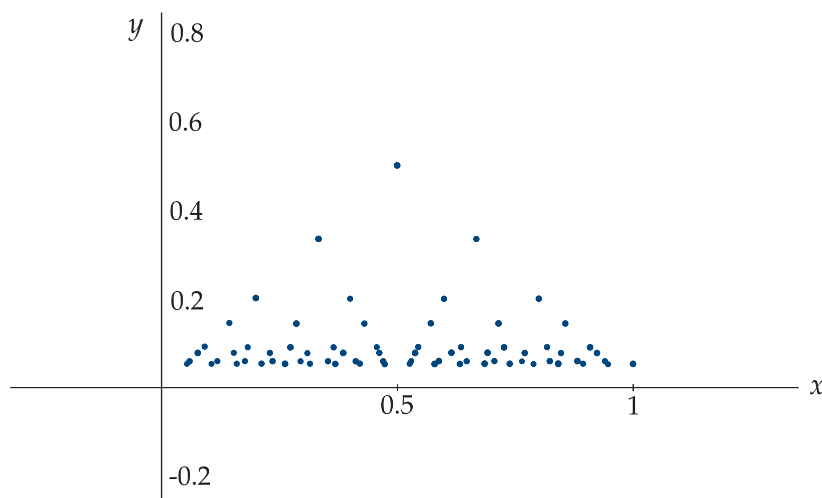
## Ejemplo 3

Sea la función $f\colon[0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0,1] \text{ y } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x\in[0,1],\, x \text{ es racional } \dfrac{p}{q},\, p \text{ y } q \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Esta función es continua en cada irracional y discontinua en cada racional (para una demostración véase el libro *Cálculo Diferencial. Fundamentos, aplicaciones y notas históricas* de este mismo autor).

En la siguiente figura se muestran algunos puntos de la gráfica de $f$.




Obsérvese que para todo natural $n \geq 2$ el número $K$ de puntos racionales $\dfrac{p}{q}$ del intervalo [0, 1], donde la función toma valores, $f\left(\dfrac{p}{q}\right)\geq\dfrac{1}{n}$ es finito. Este número $K$ depende del natural $n$, por lo que lo denotaremos por $K(n)$. Por ejemplo, $K(2) = 1$, pues $\dfrac{1}{2}$ es el único punto donde la función es mayor o igual que $\dfrac{1}{2}$. También tenemos $K(3) = 3$ , pues los únicos racionales $\dfrac{p}{q}$ del intervalo [0, 1] que cumplen $f\left(\dfrac{p}{q}\right)\geq\dfrac{1}{3}$ son $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{2}{3}$. Asimismo, tenemos $K(4) = 5$, pues hay exactamente cinco puntos donde la función cumple $f\left(\dfrac{p}{q}\right)\geq\dfrac{1}{5}$; estos puntos son: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{3}{4}$.

Probemos que $f$ es integrable en el intervalo [0, 1], para eso mostremos que para toda $\varepsilon > 0$ existe una partición $\wp$ que cumple

$$S(f, \wp)-s(f, \wp)<\varepsilon.$$

Es decir

$$\sum_{\wp} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) - \sum_{\wp} m_i\left(x_i - x_{i-1}\right) < \varepsilon,$$

donde $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ y $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$.

Es claro que $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f = 0$ para todo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de $\wp$, entonces debemos probar que para alguna partición $\wp$ se cumple $\sum_{\wp} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) < \varepsilon$.

Sea pues $\varepsilon > 0$. Para cada natural $N$ consideremos la partición $\wp$ constituida por los puntos que resultan de subdividir el intervalo [0, 1] en $N$ subintervalos de la misma longitud; por tanto, estos puntos son

$$x_k = k\frac{1}{N}.$$

Tenemos, entonces, $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{N}$ para toda $k = 1, \ldots, N$. Dado un número natural $n$, consideremos los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición $\wp$, donde $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \geq \frac{1}{n}$. Sean $A$ el conjunto de estos subintervalos y $B$ el conjunto de los subintervalos restantes. Entonces, tenemos que el número de elementos de $A$ más el número de elementos de $B$ es $N$. Por tanto, para cada subintervalo elemento de $B$ se tiene $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f < \frac{1}{n}$. La sumatoria $\sum_{\wp} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$ la descomponemos en dos partes: una sumatoria sobre los subintervalos elementos de $A$ y otra sumatoria sobre los subintervalos que son elementos de $B$

$$\sum_{\wp} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{A} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) + \sum_{B} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Obviamente tenemos

$$\sum_{B} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) < \sum_{B} \frac{1}{n}\left(x_i - x_{i-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{B}\left(x_i - x_{i-1}\right) < \frac{1}{n}.$$

Asimismo, tenemos

$$\sum_{A} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = \frac{1}{N}\sum_{A} M_1.$$

La suma $\sum_{A} M_1$ depende del valor de $n$, pero para $n$ fija es un número bien determinado y fijo que no depende de $N$. Ahora, elijamos $n_0$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ y para esta $n_0$ elijamos $N \in \mathbb{N}$, mayor que $n_0$ tal que

$$\sum_{A} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = \frac{1}{N}\sum_{A} M_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto es posible, ya que $\sum_{A} M_1$ lo hemos fijado con $n_0$. Entonces, tenemos

$$\sum_{\wp} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{A} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) + \sum_{B} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $f$ es integrable.

Un resultado que se sigue del teorema anterior es el siguiente teorema.

### Teorema

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada e integrable. Entonces, $|f|:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable y además

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_s^b |f|(x)\,dx\,.$$

El ejemplo 2 muestra la importancia de la hipótesis de que la función $f$ sea integrable, es decir que la función valor absoluto $|f|$ sea integrable no implica que $f$ sea integrable. En ese ejemplo, $|f|$ es integrable, sin embargo $f$ no lo es.

### Demostración

Para probar que $|f|$ es integrable mostremos que para toda $\varepsilon > 0$ existe una partición $\wp$ tal que

$$S(|f|,\wp)-s(|f|,\wp)=\sum_{\wp} M'_i\,(x_i-x_{i-1})-\sum_{\wp} m'_i\,(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

donde

$$M'_i=\sup_{[x_{i-1},\,x_i]}|f| \quad \text{y} \quad m'_i=\inf_{[x_{i-1},\,x_i]}|f|\,.$$

Mostremos que si $M_i=\sup_{[x_{i-1},\,x_i]} f$ y $m_i=\inf_{[x_{i-1},\,x_i]} f$ , entonces

$$M'_i-m'_i\le M_i-m$$

Probemos esta desigualdad. En un teorema anterior probamos que si $f$ es acotada en un intervalo $J$ entonces

$$\sup_J f-\inf_J f=\sup\{f(t)-f(s)\mid\ s,t\in J\}.$$

De hecho, también tenemos

$$\sup_J f-\inf_J f=\sup\{|f(t)-f(s)|\mid\ s,t\in J\}.$$

De aquí se sigue la desigualdad $|f(t)-f(s)|\le\sup_J f-\inf_J f$ para cualesquiera puntos $s,\ t\in J$. Esto implica

$$|f|(x)-|f|(y)=|f(x)|-|f(y)|\le|f(x)-f(y)|\le M_i-m_i$$

para cualesquiera puntos $x,\ y\in[x_{i-1},\ x_i]$.

Por tanto, para $y\in[x_{i-1},\ x_i]$ fija tenemos

$$|f|(x)\le|f|(y)+M_i-m_i.$$

Luego

$$M'_i\le|f|(y)+M_i-m_i\,.$$

De esta desigualdad obtenemos a la vez

$$M'_i - (M_i - m_i) \leq |f|(y).$$

De donde

$$M'_i - (M_i - m_i) \leq m'_i.$$

De aquí se sigue la desigualdad deseada

$$M'_i - m'_i \leq M_i - m_i.$$

De esta desigualdad, válida para todo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se obtiene

$$S(|f|, \wp) - s(|f|, \wp) \leq S(f, \wp) - s(f, \wp).$$

De aquí concluimos que si $f$ es integrable también lo es $|f|$. Además de la doble desigualdad

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Se sigue

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Es decir

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{y} \quad -\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

O sea

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Esto prueba el teorema.
El siguiente resultado también se prueba con facilidad.

### Teorema

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función creciente o decreciente, entonces es integrable.

### Demostración

Probaremos que $f$ es integrable cuando es creciente. La prueba para cuando $f$ es decreciente es similar. Entonces, probemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una partición $\wp$ tal que

$$S(f, \wp) - s(f, \wp) < \varepsilon.$$

Dado que $f$ es monótona creciente, esta es acotada. En efecto, para toda $x \in [a, b]$ se tiene

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Para todo natural $N$ consideremos la partición $\wp_N$, que consiste de los puntos que resultan de subdividir el intervalo $[a, b]$ en $N$ subintervalos de la misma longitud. Es decir, $\wp_N$ consiste de los puntos

$$x_i = a + i\frac{b-a}{N}.$$

Como $f$ es creciente se tiene

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i) \quad \text{y} \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} S(f, \wp) - s(f, \wp) &= \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) - \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}) \\ &= \frac{b-a}{N}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1}) + f(b)\right) - \frac{b-a}{N}\left(f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1})\right) \\ &= \frac{b-a}{N}\left(f(b) - f(a)\right). \end{aligned}$$

Si elegimos $N$ tal que

$$N > \frac{(b-a)\left(f(b)-f(a)\right)}{\varepsilon}.$$

Obtenemos

$$S(f, \wp) - s(f, \wp) < \varepsilon.$$

Esto prueba el teorema.

## Teorema fundamental del cálculo

En este punto, ahora enunciamos y probamos la versión del teorema fundamental del cálculo para funciones integrables no necesariamente continuas.

### Teorema (fundamental del cálculo)

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable.

1) Sea $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du.$$

Entonces, $F$ es continua en $[a, b]$ y es derivable en cada punto donde $f$ es continua. Además, para cada punto $x$ de continuidad de $f$ se tiene

$$F'(x) = f(x).$$

2) Si $G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es cualquier primitiva de $f$, es decir $G$ cumple $G'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

### Demostración

Primero, probemos el inciso 1). Demostremos que $F$ es continua en cada $x \in [a, b]$, lo cual equivale a mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\left[F(x+h)-F(x)\right]=0.$$

Supongamos $a < x < b$. Sea $h$ positiva tal que $[x, x+h] \subset [a, b]$. Por la propiedad aditiva de la integral tenemos

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(u)du - \int_a^x f(u)du \\ &= \int_a^x f(u)du + \int_x^{x+h} f(u)du - \int_a^x f(u)du \\ &= \int_x^{x+h} f(u)du. \end{aligned}$$

Si $m_h = \inf_{[x,\, x+h]} f$ y $M_h = \sup_{[x,\, x+h]} f$ tenemos $m_h \le f(x) \le M_h$ para toda $x \in [x, x+h]$.

Por tanto, por un teorema anterior

$$m_h h \le \int_x^{x+h} f(u)du \le M_h h.$$

Si $h < 0$ tal que $x+h, x \subset [a, b]$, también se sigue de la propiedad aditiva generalizada de la integral

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(u)du - \int_a^x f(u)du \\ &= \int_x^{x+h} f(u)du \\ &= -\int_{x+h}^{x} f(u)du. \end{aligned}$$

Por otra parte, si ahora hacemos $m_h = \inf_{[x+h,\, x]} f$ y $M_h = \sup_{[x+h,\, x]} f$, tenemos

$$m_h(-h) \le \int_{x+h}^{x} f(u)du \le M_h(-h).$$

Ahora bien, si multiplicamos por $-1$ todos los miembros de la doble desigualdad obtenemos

$$M_h h \le -\int_{x+h}^{x} f(u)du \le m_h h.$$

O sea

$$M_h h \le \int_x^{x+h} f(u)du \le m_h h$$

$$M_h h \le F(x+h)-F(x) \le m_h h.$$

Tenemos entonces las desigualdades

$$m_h h \leq F(x+h) - F(x) \leq M_h h$$

y

$$M_h h \leq F(x+h) - F(x) \leq m_h h.$$

La primera se cumple para $h > 0$ y la segunda para $h < 0$ con tal que el intervalo con extremos $x$ y $x + h$ esté contenido en $[a, b]$.

Dado que $m \leq m_h$ y $M_h \leq M$, entonces para $h > 0$ también se cumple

$$mh \leq F(x+h) - F(x) \leq Mh$$

y para $h < 0$,

$$Mh \leq F(x+h) - F(x) \leq mh$$

donde

$$m = \inf_{[a,\, b]} f \ \text{ y } \ M = \sup_{[a.\, b]} f \,.$$

En ambos casos se supone que el intervalo con extremos $x$ y $x + h$ esté contenido en $[a, b]$.

De estas dos desigualdades y del teorema del sándwich se sigue que

$$\lim_{h \to 0} \left[ F(x+h) - F(x) \right] = 0 \cdot$$

Esto prueba que $F$ es continua $x$. Si $x$ es uno de los extremos $a$ o $b$, también se sigue de las dos desigualdades que los límites laterales correspondientes son iguales a cero.

Supongamos ahora que $f$ es continua en $a < x < b$. Si $h > 0$, de la desigualdad

$$m_h h \leq F(x+h) - F(x) \leq M_h h$$

se sigue

$$m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h \cdot$$

Si $h < 0$, de la desigualdad

$$M_h h \leq F(x+h) - F(x) \leq m_h h$$

se sigue

$$m_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_h \,.$$

Así que para toda $h \neq 0$, se cumple la misma desigualdad sin importar el signo de $h$, con tal que el intervalo con extremos $x$ y $x + h$ esté contenido en $[a, b]$. Entonces, dado que $m_h \to f(x)$ y $M_h \to f(x)$ cuando $h \to 0$ se sigue que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \,.$$

Esto prueba el inciso 1 del teorema.

Ahora, probemos el inciso 2 de este mismo teorema. Como $f$ es Riemann integrable, por definición para cualquier sucesión de particiones $\wp_n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots x_{k_n}^n\}$ del intervalo $[a,b]$ y cualquier selección de puntos $t_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum f(t_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n)$$

con tal que la sucesión de mallas $\delta_n = \text{máx}\{x_i^n - x_{i-1}^n\}$ tienda a cero.

Consideremos aquí una tal sucesión de particiones $(\wp_n)$. Si $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, es decir $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$, se sigue del teorema del valor medio que existen puntos $t_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ tales que

$$F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(t_i^n)(x_1^n - x_{i-1}^n) = f(t_i^n)(x_1^n - x_{i-1}^n).$$

Por tanto, tenemos

$$\sum_i \left(F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)\right) = \sum_i f(t_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n).$$

Pero, $F(b) - F(a) = \sum_i \left(F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)\right)$, así que para esta selección de puntos $t_i^n$ tenemos

$$\sum_i f(t_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = F(b) - F(a).$$

Entonces, para cada una de las particiones $\wp_n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots x_{k_n}^n\}$, tenemos trivialmente

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum f(t_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = F(b) - F(a).$$

Esto prueba la segunda parte del teorema fundamental del cálculo (TFA).

## Nota

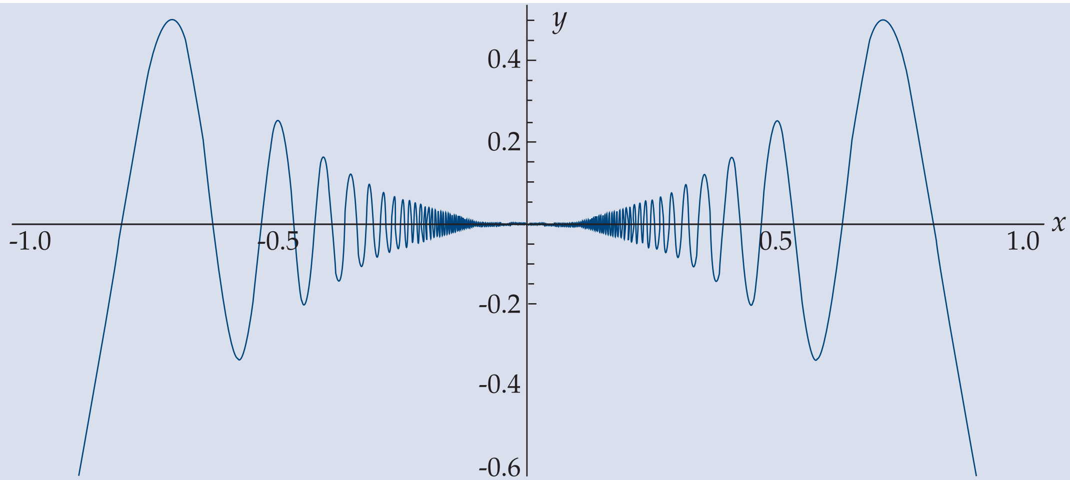
Es importante observar que en el inciso 2) del teorema fundamental del cálculo se tiene como hipótesis que la función $F' = f$ es integrable. Dicha hipótesis es indispensable, ya que por ejemplo la función $F:[-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{\pi}{x^2} & \text{si } [-1,1], x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

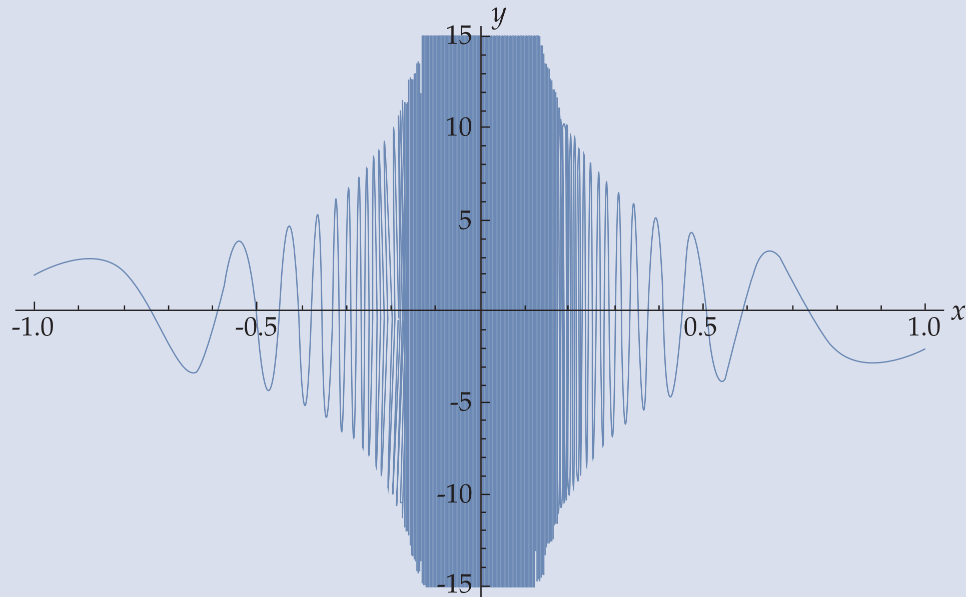
Es derivable en el intervalo $[-1, 1]$ y su derivada está dada por

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{\pi}{x^2} + \dfrac{2\pi}{x^2} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x^2} & \text{si } [-1,1], x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función $F'$ no es integrable, ya que no es acotada. A continuación se muestran las gráficas de $F$ y $F'$.




Gráfica de $F$




Gráfica de $F'$

Un ejemplo más interesante es el que construyó el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) en 1881. Volterra construyó una función $F$ derivable en el intervalo [0, 1] cuya derivada $F'$ es acotada pero no integrable. No obstante, la construcción de esta función va más allá de los propósitos de este libro. Para más información y otro ejemplo también puede consultarse el artículo del autor de este libro, "Casos en los que no es aplicable la fórmula $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$" publicado en el número 48 de la *Revista Miscelánea Matemática*, Sociedad Matemática Mexicana, 2009, pp. 59-74.

# ÍNDICE ALFABÉTICO